

*Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme***1) Exemple numérique**

**1.1)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$p(x) = x^3 + (-2 + 3i)x^2 + (-3 - 5i)x + 6 - 2i = (x^3 - 2x^2 - 3x + 6) + i(3x^2 - 5x - 2).$$

Par suite,  $p(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$ . L'équation  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  admet pour solutions  $-\frac{1}{3}$  et 2. De plus,  $2^3 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 0$  et donc  $p(2) = 0$ .

**1.2)** Le discriminant du trinôme  $z^2 + 3iz - 3 + i$  est  $\Delta = (3i)^2 - 4(-3 + i) = 3 - 4i = (2 - i)^2$  et donc les racines du trinôme  $z^2 + 3iz - 3 + i$  sont  $z_1 = \frac{-3i + 2 - i}{2} = 1 - 2i$  et  $z_2 = \frac{-3i - 2 + i}{2} = -1 - i$ .

**1.3)** Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $p(z) = z^3 + (-2 + 3i)z^2 + (-3 - 5i)z + 6 - 2i = (z - 2)(z^2 + 3iz - 3 + i)$  et donc les racines de  $p$  dans  $\mathbb{C}$  sont  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = -1 - i$  et  $z_3 = 2$ .

$\max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\} = \max\{\sqrt{40}, 1 + \sqrt{34}, 1 + \sqrt{13}\} = 1 + \sqrt{34} = 6,8\dots$  Ensuite,  $|z_1| = \sqrt{5} \leq 1 + \sqrt{34}$ ,  $|z_2| = \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{34}$  et  $|z_3| = 2 \leq 1 + \sqrt{34}$ . Donc

les racines de  $p$  sont dans le disque fermé de centre  $O$  et de rayon  $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$ .

**2) Etude du cas général**

**2.1) 2.1.a)** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'égalité  $AV = \lambda V$  fournit

$$|\lambda v_i| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} v_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |v_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \right) \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|) = r_i \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|).$$

**2.1.b)** On choisit en particulier pour  $i$  un indice  $i_0$  tel que  $|v_{i_0}| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|)$ . Puisque  $V$  est un vecteur propre de  $A$ ,  $V$  n'est pas nul et donc  $|v_{i_0}| > 0$ . D'après la question précédente,

$$|\lambda v_{i_0}| \leq r_{i_0} \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|) = r_{i_0} |v_{i_0}|,$$

et donc  $|\lambda| \leq r_{i_0}$  après simplification par le réel strictement positif  $|v_{i_0}|$ . Ainsi,  $\lambda \in D_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

Toute valeur propre de  $A$  appartient à  $\bigcup_{i=1}^n D_i$ .

**2.2) 2.2.a)** On développe  $\det(M_P - zI_n)$  suivant sa dernière colonne. On obtient une écriture de la forme

$$\det(M_P - zI_n) = (-z - a_{n-1})\Delta_{n-1} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} (-a_{n-k})\Delta_k,$$

où les  $\Delta_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , sont des déterminants de format  $n-1$ .

Plus précisément,  $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -z & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & -z \end{vmatrix} = (-z)^{n-1}$ . Ensuite, pour  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $\Delta_k$  est défini par blocs par

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} -z & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & -z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{C}).$$

On a donc  $\Delta_k = (-z)^{n-k}$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \det(M_p - zI_n) &= (-z - a_{n-1})(-z)^{n-1} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} (-a_{n-k})(-z)^{n-k} = (-1)^n \left( (z + a_{n-1})z^{n-1} + \sum_{k=2}^n a_{n-k}z^{n-k} \right) \\ &= (-1)^n \left( z^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}z^{n-k} \right) = (-1)^n \left( z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right) = (-1)^n P(z). \end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \det(M_p - zI_n) = (-1)^n P(z).$$

**2.2.b)** Ainsi, les racines de  $P$  sont encore les valeurs propres de  $M_p$ . D'après la question 2.1.b), pour tout  $\lambda$  racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ , on a  $|\lambda| \leq \max\{r_k, 1 \leq k \leq n\}$ . Mais ici,  $r_1 = |a_0|$  puis pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $|r_k| = 1 + |a_{k-1}|$ . Donc pour tout  $\lambda$  racine de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ , on a  $|\lambda| \leq \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$ .

## Partie B : la borne de Cauchy

### 1) Un résultat préliminaire

**1.1)** Pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{x^{n-k}}$ . Puisque les réels  $c_k$  sont positifs et non tous nuls, chaque fonction  $x \mapsto \frac{c_k}{x^{n-k}}$ ,  $0 \leq n-1$ , est décroissante sur  $]0, +\infty[$ , l'une au moins de ces fonctions étant strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ . La fonction  $h$  est donc strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  en tant que somme de fonctions décroissantes sur  $]0, +\infty[$ , l'une au moins de ces fonctions étant strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

**1.2)** Une racine réelle strictement positive du polynôme  $H$  est une racine réelle strictement positive de la fonction  $h$  et réciproquement.

- Soit  $p = \text{Min}\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / c_k > 0\}$ . Alors,  $h(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{c_p}{x^{n-p}}$  (car un polynôme non nul est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré). En particulier,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{x^{n-k}} \right) = -1$ .

- Ainsi, la fonction  $h$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  et donc la fonction  $h$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $h(]0, +\infty[) = ]-1, +\infty[$ . En particulier, 0 a un antécédent et un seul par la fonction  $h$  dans  $]0, +\infty[$  ou encore l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution réelle strictement positive et une seule. Il en est de même de l'équation  $H(x) = 0$ . On note  $\alpha$  cette racine

On a  $h'(\alpha) = \frac{H'(\alpha)}{\alpha^n} - \frac{nH(\alpha)}{\alpha^{n+1}} = -\frac{H'(\alpha)}{\alpha^n}$  mais aussi  $h'(\alpha) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)c_k}{\alpha^{n-k+1}} < 0$  car l'un au moins des  $c_k$  est strictement positif. Donc  $H'(\alpha) < 0$  et en particulier,  $H'(\alpha) \neq 0$ . On sait alors que  $\alpha$  est une racine simple de  $H$ .

**1.3)** Puisque  $|\zeta| > \alpha$  et que la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on a  $h(|\zeta|) < 0$  puis  $H(|\zeta|) > 0$ . Ceci fournit  $|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$ .

Par contraposition, on en déduit encore que  $|\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k \Rightarrow |\zeta| \leq \alpha$ .

**1.4)** Soit  $\zeta$  une racine de  $H$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors

$$|\zeta|^n = |\zeta^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k \zeta^k| = \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k,$$

et d'après la question précédente, on a  $|\zeta| \leq \alpha$ . Donc les racines de  $H$  appartiennent au disque fermé de centre 0 et de rayon  $\alpha$ .

## 2) Une application

2.1) Puisque les nombres  $a_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , sont tous strictement positifs,

$$\begin{aligned} F_\gamma(X) &= (X-\gamma) \left( \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{k+1} - \gamma \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \sum_{k=1}^m a_{k-1} X^k - \gamma \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \\ &= a_{m-1} X^m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k-1} - \gamma a_k) X^k - \gamma a_0 = a_{m-1} \left( X^m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_{m-1}} \left( \gamma - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) X^k - \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}} \right) \end{aligned}$$

Le polynôme  $\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma = X^m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_{m-1}} \left( \gamma - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) X^k - \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}}$  est donc de la forme  $X^m - \sum_{k=0}^{m-1} c_k X^k$  avec  $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ ,

$c_k \geq 0$  et de plus  $c_0 = \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}} > 0$ . D'après la question B.1.2), le polynôme  $\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma$  admet une racine strictement positive et une seule qui est bien sûr  $\gamma$ .

Il en est de même de  $F_\gamma$ . Maintenant, si  $\zeta$  est une racine de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ , alors  $\zeta$  est une racine de  $F_\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  et, d'après la question B.1.4), on a  $|\zeta| \leq \gamma$ .

2.2)  $F(0) = a_0 \neq 0$ . Donc  $\zeta$  n'est pas nul. Mais alors  $\frac{1}{\zeta}$  est racine du polynôme

$$G(X) = X^{m-1} F\left(\frac{1}{X}\right) = a'_{m-1} X^{m-1} + a'_{m-2} X^{m-2} + \dots + a'_1 X + a'_0$$

avec  $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ ,  $a'_k = a_{m-1-k}$ . D'après la question précédente,

$$\left| \frac{1}{\zeta} \right| \leq \max_{i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a'_{i-1}}{a'_i} \right\} = \max_{i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_{m-i}}{a_{m-i-1}} \right\} = \max_{k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_k}{a_{k-1}} \right\} = \frac{1}{\min_{k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_{k-1}}{a_k} \right\}} = \frac{1}{\gamma'}$$

et donc  $\gamma' \leq |\zeta|$ .

## 3) La borne de Cauchy

3.1) Puisque  $a_n \neq 0$ , l'équation proposée est équivalente à l'équation  $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k = 0$ . D'après la question B.1.2)

appliquée avec  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $c_k = \frac{|a_k|}{|a_n|}$ , cette équation admet une racine réelle strictement positive et une seule (les réels  $c_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  étant bien tous positifs et non tous nuls).

3.2) Soit  $\zeta$  une racine de  $f$  dans  $\mathbb{C}$ , alors  $\zeta^n = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \zeta^k$  puis  $|\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} |\zeta|^k$ . On en déduit avec les notations de la question 1) que  $H(|\zeta|) \leq 0$  puis que  $h(|\zeta|) \geq 0 = h(\rho(f))$ . Puisque la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ , on a donc  $|\zeta| \leq \rho(f)$ .

3.3) 3.3.a) Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme,

$$(-1)^{n-k} \frac{a_k}{a_n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_k}$$

Le nombre de termes de cette somme est le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments c'est-à-dire  $\binom{n}{k}$ .

On en déduit que

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_{i_1}| |\zeta_{i_2}| \dots |\zeta_{i_k}| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_n| |\zeta_n| \dots |\zeta_n| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_n|^k = \binom{n}{k} |\zeta_n|^k.$$

3.3.b) Par définition de  $\rho(f)$ ,  $|a_n| \rho(f)^n = \sum_{k=0}^n |a_k| \rho(f)^k$  et donc, d'après la question 3.3.a)

$$\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \rho(f)^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}.$$

**3.3.c)** Donc  $\rho(f)^n \leq \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k} \right) - \rho(f)^n = (\rho(f) + |\zeta_n|)^n - \rho(f)^n$  puis  $2\rho(f)^n \leq (\rho(f) + |\zeta_n|)^n$  puis  $\sqrt[n]{2} \rho(f) \leq \rho(f) + |\zeta_n|$  (par croissance de la fonction  $t \mapsto \sqrt[n]{t}$  sur  $\mathbb{R}^+$ ) et finalement

$$\boxed{(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n| \leq \rho(f).}$$

**3.3.d)** Comme à la question 2.2),  $g(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right)$ . Comme 0 n'est pas racine de  $f$  (ce qui équivaut à  $a_0 \neq 0$ ), un nombre  $\zeta$  est racine de  $f$  si et seulement si  $\frac{1}{\zeta}$  est racine de  $g$ . Les racines de  $g$  sont donc  $\frac{1}{\zeta_1}, \dots, \frac{1}{\zeta_n}$  avec  $\frac{1}{|\zeta_n|} \leq \dots \leq \frac{1}{|\zeta_1|}$ . Mais alors, d'après la question précédente,  $(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(g) \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \leq \rho(g)$ . En particulier,  $\rho(g) > 0$  et d'autre part,  $\sqrt[n]{2} - 1 > 0$  puisque  $n \geq 2$ . On en déduit que  $\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{(\sqrt[n]{2} - 1)\rho(g)}$ .

**3.4)**  $\rho(p)$  est la solution strictement positive de l'équation  $x^3 - \sqrt{13}x^2 - \sqrt{34}x - \sqrt{40}$ . On pose  $H(X) = X^3 - \sqrt{13}X^2 - \sqrt{34}X - \sqrt{40}$ . D'après la question B.1.), pour  $x > \rho(p)$ ,  $H(x) > 0$  et pour  $x < \rho(p)$ ,  $H(x) < 0$ . La calculatrice fournit  $H(5) = -0,6\dots < 0$  et  $H(5,1) = 2,8\dots > 0$ . Donc

$$\boxed{\rho(p) = 5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par défaut.}}$$

Les racines de  $p$  sont  $\zeta_1 = -1 - i$ ,  $\zeta_2 = 2$  et  $\zeta_3 = 1 - 2i$  avec  $|\zeta_1| = \sqrt{2}$ ,  $|\zeta_2| = 2$  et  $|\zeta_3| = \sqrt{5}$  de sorte que  $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq |\zeta_3|$ . On a bien  $|\zeta_3| = \sqrt{5} = 2,2\dots < 5 < \rho(p)$  et  $(\sqrt[3]{2} - 1)\rho(p) < (1,3 - 1) \times 5,1 = 1,53 < |\zeta_3|$ .

#### 4) Un raffinement de la borne de Cauchy

**4.1)** Posons  $H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k$  et  $H_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k$ .  $\rho(f)$  est l'unique racine réelle strictement positive de  $H$  et  $\rho(f_1)$  est l'unique racine réelle strictement positive de  $H_1$ . De plus, pour  $x$  réel positif,  $x \leq \rho(f) \Leftrightarrow H(x) \leq 0$ . Or

$$H(\rho(f_1)) = \rho(f_1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \rho(f_1)^k = H_1(\rho(f_1)) - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \rho(f_1)^{n-1} = -\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \rho(f_1)^{n-1} \leq 0,$$

et donc

$$\boxed{\rho(f_1) \leq \rho(f).}$$

**4.2)**  $\rho(f_1) > 0$  et  $|a_n| \rho(f_1) = \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \rho(f_1)^k$  par définition de  $\rho(f_1)$ . Ensuite, puisque  $|\zeta| > \rho(f_1)$ , on a en particulier  $\zeta \neq 0$ .

$$a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k \zeta^k = 0 \Rightarrow a_{n-1} + a_n \zeta = -\frac{1}{\zeta^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k \zeta^k \Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| = \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k}{\zeta^{n-1-k}} \right|$$

$$\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{|\zeta|^{n-1-k}}$$

$$\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{\rho(f_1)^{n-1-k}} \text{ (car } \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, n-1-k < 0 \text{ et donc}$$

la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{n-1-k}}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ )

$$\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \rho(f_1)^k = \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \times |a_n| \rho(f_1)^n = |a_n| \rho(f_1).$$

**4.3)** Mais alors  $\left| \zeta + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \leq \rho(f_1)$  et donc  $\zeta \in \mathcal{D}_1$ . Ainsi, une racine  $\zeta$  de  $f$  vérifie ou bien  $\zeta \in \mathcal{D}_0$ , ou bien  $\zeta \notin \mathcal{D}_0$  et dans ce cas,  $\zeta \in \mathcal{D}_1$ . Par suite, toute racine de  $f$  est dans  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ .

## Partie C : un théorème de Lucas

### 1) Préliminaires

**1.1)**  $\mathcal{P}$  est un convexe de  $\mathcal{P}$  contenant  $P$  et donc  $E$  n'est pas vide. On en déduit que  $\mathcal{E}(P)$  est bien définie.

On sait qu'une intersection de convexes est un convexe. Donc  $\mathcal{E}(P)$  est un convexe. Ensuite, chaque élément  $\Gamma$  de  $E$  contient  $P$  et par suite,  $\mathcal{E}(P)$  contient  $P$ . Ainsi,  $\mathcal{E}(P)$  est un convexe contenant  $P$ .

Enfin, si  $\Gamma_0$  est un convexe contenant  $P$ , alors  $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$  est contenu dans  $\Gamma_0$ . Donc,  $\mathcal{E}(P)$  est la plus petite partie convexe contenant  $P$ .

**1.2)** • Montrons que  $\mathcal{B}$  est un convexe contenant  $P$ . Tout d'abord, pour chaque  $p \in P$ ,  $\mathcal{B}$  contient  $\text{bar}\{p(1)\} = p$  et donc  $P \subset \mathcal{B}$ .

Ensuite, soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{B}$  puis  $\lambda \in [0, 1]$ . Il existe  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$  puis  $(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m) \in P^{n+m}$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_m) \in [0, 1]^{n+m}$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^m \mu_k = 1$  et  $A = \text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_n(\lambda_n)\}$  et  $B = \text{bar}\{B_1(\mu_1), \dots, B_m(\mu_m)\}$ . D'après le théorème du barycentre partiel

$$\text{bar}\{A(\lambda), B(1-\lambda)\} = \text{bar}\{A_1(\lambda\lambda_1), \dots, A_n(\lambda\lambda_n), B_1((1-\lambda)\mu_1), \dots, B_m((1-\lambda)\mu_m)\} \in \mathcal{B}.$$

Donc  $\mathcal{B}$  est un convexe contenant  $P$  et on en déduit que  $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{B}$ .

• Montrons que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}(P)$ . On doit vérifier pour cela que  $\mathcal{E}(P)$  contient les barycentres de familles finies de points de  $P$  affectés de coefficients positifs. On montre le résultat par récurrence sur  $n \geq 1$  le nombre de points d'une famille finie d'éléments de  $P$ .

-  $\mathcal{E}(P)$  contient  $P$  et donc pour chaque  $p \in P$ ,  $\mathcal{E}(P)$  contient  $p = \text{bar}\{p(1)\}$ . Le résultat est donc vrai quand  $n = 1$ .

- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\mathcal{E}(P)$  contienne les barycentres à coefficients positifs de toute famille de  $n$  points de  $P$ .

Soient  $A_1, \dots, A_{n+1}$   $n+1$  points de  $P$  puis  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$  tels que  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ .

Si  $\lambda_{n+1} = 1$ , alors  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = 0$  et donc  $\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} = A_{n+1} \in P \subset \mathcal{E}(P)$ .

Sinon,  $\lambda_{n+1} \in [0, 1[$  et donc  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} \in ]0, 1[$ . Posons  $A = \text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_n(\lambda_n)\}$ . D'après le théorème du barycentre partiel,

$$\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} = \text{bar}\{A(1 - \lambda_{n+1}), A_{n+1}(\lambda_{n+1})\}.$$

Maintenant,  $A \in \mathcal{E}(P)$  par hypothèse de récurrence et donc  $\text{bar}\{A(1 - \lambda_{n+1}), A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} \in \mathcal{E}(P)$  car  $\mathcal{E}(P)$  est un convexe contenant  $P$ . Finalement,  $\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} \in \mathcal{E}(P)$ .

Le résultat est démontré par récurrence.

$\mathcal{B} = \mathcal{E}(P).$

### 2)

**2.1)** Le polynôme  $f$  s'écrit  $f = a_n(X - r_1)^{\alpha_1} \dots (X - r_m)^{\alpha_m}$  où les  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , sont des entiers naturels non nuls tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ . Mais alors

$$f' = \sum_{j=1}^m \left( a_n \alpha_j (X - r_j)^{\alpha_j - 1} \prod_{k \neq j} (X - r_k)^{\alpha_k} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j f}{X - r_j},$$

et donc si  $z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, \dots, r_m\}$ ,  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$ .

**2.2)** On a  $f'(r) = 0$  et  $f(r) \neq 0$ . Par suite,

$$0 = \frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{r - r_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j \overline{(r - r_j)}}{|r - r_j|^2} = \overline{\left( \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) \right)},$$

et donc  $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$ . On en déduit que

$$r = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} r_j}{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2}}$$

Ainsi, si pour  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on pose  $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{|r - r_k|^2}$ , les nombres  $\lambda_k$ ,  $1 \leq m$ , sont des réels strictement positifs de somme

1 tels que  $r = \sum_{k=1}^m \lambda_k r_k$ . On a montré que le point d'affixe  $r$  est barycentre à coefficients positifs des points  $M_1, \dots, M_m$  d'affixes respectives  $r_1, \dots, r_m$ .

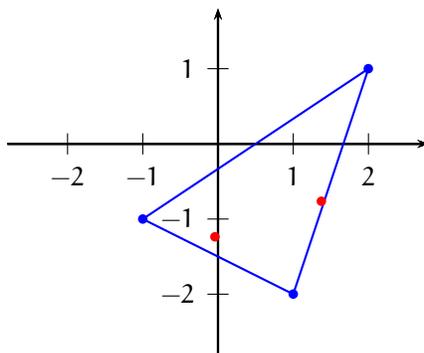
**2.3)** Ainsi, toute racine de  $f'$  qui n'est pas racine de  $f$  est dans l'enveloppe convexe des racines de  $f$ . Ce résultat persiste bien sûr pour les racines de  $f'$  qui sont des racines de  $f$  car l'enveloppe convexe des racines de  $f$  contient les racines de  $f$ . Finalement

les racines de  $f'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $f$ .

**2.4)**  $p' = 3X^2 + 2(-2 + 3i)X - 3 - 5i$ . Le discriminant réduit de  $p'$  est  $\Delta' = (-2 + 3i)^2 - 3(-3 - 5i) = 4 + 3i$ . Ensuite, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(x + iy)^2 = 4 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i) \right\}.$$

Les racines de  $p'$  sont  $Z_1 = \frac{1}{3} \left( 2 - 3i + \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i) \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$  et  $Z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -1 - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$ . On a représenté ci-dessous ces racines par des points rouges, l'enveloppe convexe des racines de  $p$  ayant été représentée en bleu.



## Partie D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

### 1) Etude du cas où $M_1M_2M_3$ est équilatéral

**1.1)** • Supposons que  $f'$  possède une racine double  $\omega$ . On note  $\Omega$  le point d'affixe  $\omega$ . Alors, puisque  $f$  est unitaire de degré 3,  $f'(X) = 3(X - \omega)^2$  puis il existe un complexe  $A$  tel que  $f(X) = (X - \omega)^3 - A$ . On ne peut avoir  $A = 0$  car alors  $M_1 = M_2 = M_3$  ce qui n'est pas.

En notant  $a$  une racine cubique de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ , on a  $a \neq 0$  et

$$f(X) = (X - \omega)^3 - a^3 = (X - \omega - a)(X - \omega - ja)(X - \omega - j^2a) \text{ ou } j = e^{2i\pi/3}.$$

Donc  $\{r_1, r_2, r_3\} = \{\omega + a, \omega + ja, \omega + j^2a\}$ . Quite à renuméroter les points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ , on peut supposer que  $r_1 = \omega + a$ ,  $r_2 = \omega + ja$  et  $r_3 = \omega + j^2a$ . Les points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  sont sur le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et de rayon  $|a|$ . De plus,

$$\left( \overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2} \right) = \arg \left( \frac{r_2 - \omega}{r_1 - \omega} \right) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3} [2\pi],$$

et de même  $(\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_3}) = (\overrightarrow{\Omega M_3}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

Donc le triangle  $M_1M_2M_3$  est équilatéral.

Supposons que le triangle  $M_1M_2M_3$  soit équilatéral direct de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ . Les racines  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  s'écrivent alors  $\omega + \mathbf{a}$ ,  $\omega + j\mathbf{a}$  et  $\omega + j^2\mathbf{a}$ , pour un certain complexe  $\mathbf{a} \neq 0$ . Mais alors  $f(X) = (X - \omega - \mathbf{a})(X - \omega - j\mathbf{a})(X - \omega - j^2\mathbf{a}) = (X - \omega)^3 - \mathbf{a}^3$  puis  $f'(X) = 3(X - \omega)^2$  et donc  $f'$  admet une racine double à savoir  $\omega$ .

**1.2)** Si les racines de  $f$  forment un triangle équilatéral,  $f'(X)$  admet une unique racine  $\omega$  qui est l'affixe du centre de gravité du triangle et donc aussi centre du cercle inscrit au triangle  $M_1M_2M_3$ .

## 2) Une propriété de la tangente à l'ellipse

$$2.1) \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) - \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F'}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F} - \overrightarrow{M(t)F'}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{F'F}) = \vec{0} \text{ et donc } \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) = \vec{\tau}(t) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F'}).$$

**Remarque.** Un vecteur directeur de la tangente en  $M(t)$  est normalement le vecteur  $\vec{\tau}(t) = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$  et on note que pour tout point  $O$  du plan,  $\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM(t)}) = \frac{d}{dt} (M(t) - O) = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ .

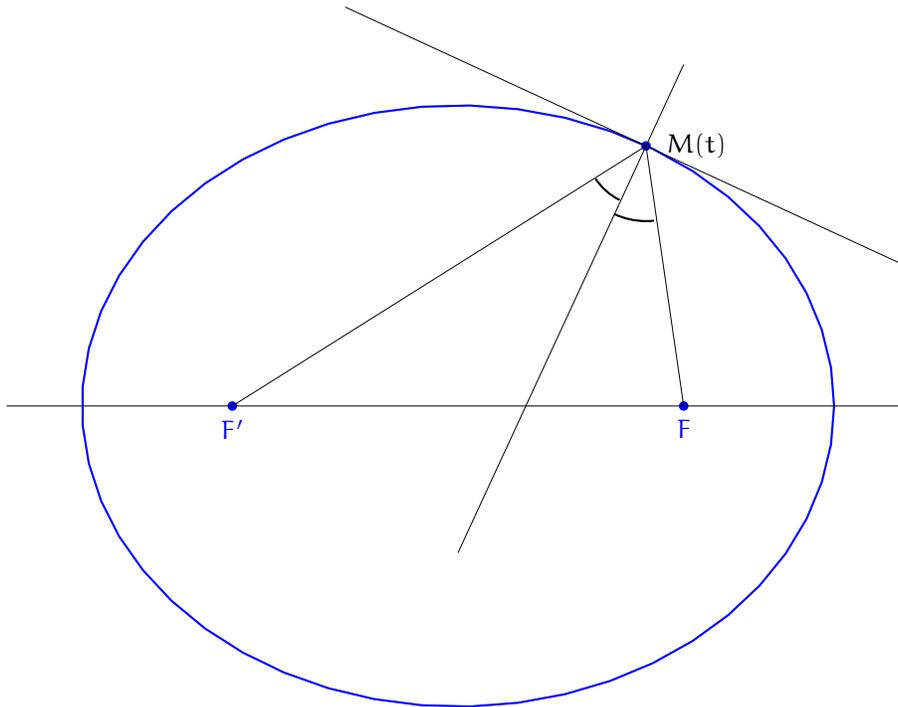
2.2) La fonction  $t \mapsto M(t)F + M(t)F'$  est constante. Donc,  $\frac{d}{dt} (M(t)F + M(t)F') = 0$ .

Maintenant,  $\frac{d}{dt} (M(t)F^2) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}^2) = 2 \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) \cdot \overrightarrow{M(t)F} = 2 \overrightarrow{M(t)F} \cdot \vec{\tau}(t)$ . Par suite,

$$\frac{d}{dt} (M(t)F) = \frac{d}{dt} (\sqrt{M(t)F^2}) = \frac{1}{2\sqrt{M(t)F^2}} \frac{d}{dt} (M(t)F^2) = \frac{1}{2M(t)F} 2 \overrightarrow{M(t)F} \cdot \vec{\tau}(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{\tau}(t).$$

De même,  $\frac{d}{dt} (M(t)F') = \vec{v}(t) \cdot \vec{\tau}(t)$  et finalement  $0 = \frac{d}{dt} (M(t)F + M(t)F') = \vec{u}(t) \cdot \vec{\tau}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{\tau}(t) = (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) \cdot \vec{\tau}(t)$ .

2.3) Le vecteur  $-\vec{u}(t)$  est un vecteur directeur unitaire de la demi-droite  $[M(t)F]$  et le vecteur  $-\vec{v}(t)$  est un vecteur directeur unitaire de la demi-droite  $[M(t)F']$ . Donc le vecteur  $-(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))$  dirige la bissectrice intérieure de l'angle orienté de demi-droites  $([M(t)F], [M(t)F'])$  ou encore de l'angle orienté de vecteurs  $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$ . Le vecteur  $\vec{\tau}(t)$  dirige la tangente en  $M(t)$  et ce vecteur est orthogonal au vecteur  $-(\vec{u}(t) + \vec{v}(t))$ . Par suite, la tangente en  $M(t)$  est orthogonale à la bissectrice intérieure de l'angle  $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$  ou encore la tangente en  $M(t)$  est la bissectrice extérieure de l'angle  $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$ .



## 3) Un théorème de Poncelet

3.1) Vérifions que les points  $F_1$ ,  $T_1$  et  $F'$  sont alignés dans cet ordre ou encore que  $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'}) = \pi [2\pi]$ . Le point  $T_1$  est un point de l'ellipse. Notons  $\vec{u}$  un vecteur directeur de la tangente  $(PT_1)$ . On note  $\vec{n}$  un vecteur directeur de la normale à l'ellipse en  $T_1$ .

La tangente en  $T_1$  est bissectrice intérieure de l'angle  $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'})$ .

Donc  $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'}) = 2 (\vec{u}, \overrightarrow{T_1F'}) [2\pi]$ .

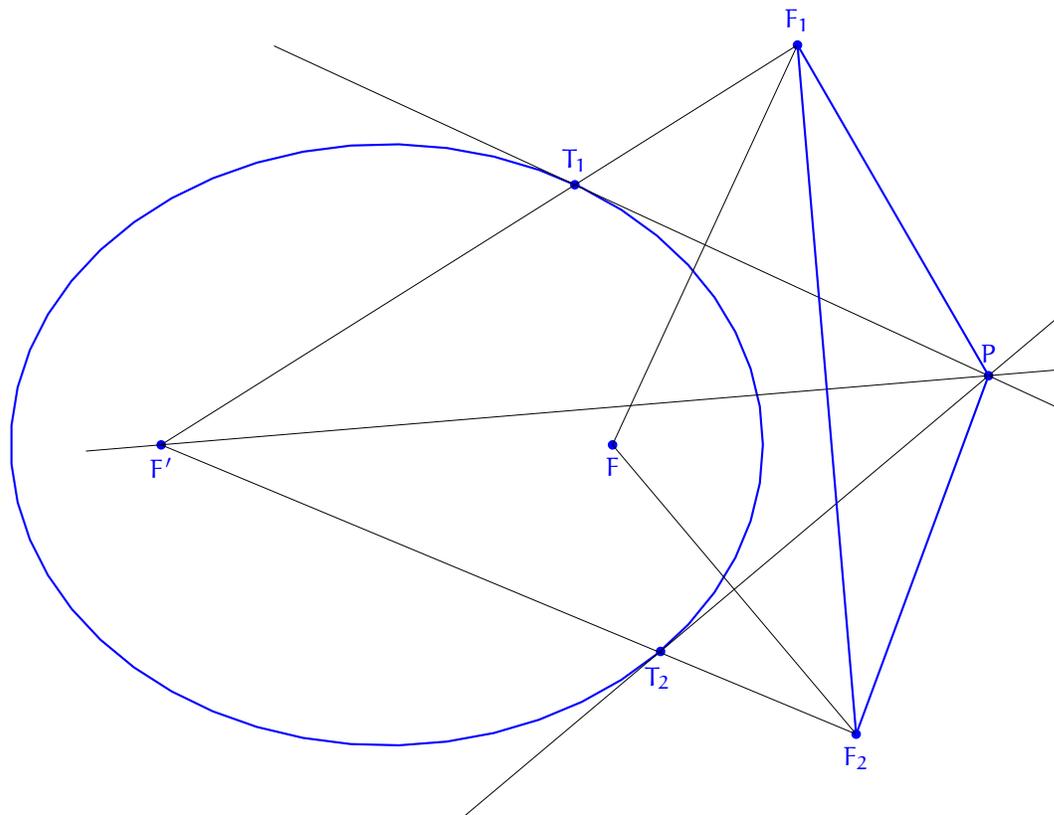
D'après la question précédente, la normale en  $T_1$  est bissectrice intérieure de l'angle  $(\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{T_1F'})$ .

Donc  $(\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{T_1F'}) = 2(\overrightarrow{T_1F}, \vec{n}) [2\pi]$ . Par suite,

$$(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'}) = (\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F}) + (\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{T_1F'}) = 2((\vec{u}, \overrightarrow{T_1F}) + (\overrightarrow{T_1F}, \vec{n})) = 2(\vec{u}, \vec{n}) = \pi [2\pi],$$

(car  $2 \times \pm \frac{\pi}{2} \equiv \pi [2\pi]$ ). Mais alors

$$F_1F' = F_1T_1 + T_1F' = FT_1 + T_1F' = 2a.$$



**3.2)** De même,  $F'F_2 = 2a$  et donc  $F'F_1 = F'F_2 = 2a$ . D'autre part,  $PF_1 = PF = PF_2$ . Donc les points P et F' sont deux points distincts de la médiatrice du segment  $[F_1F_2]$  et finalement la droite  $(PF')$  est la médiatrice du segment  $[F_1F_2]$ .

**3.3) 3.3.a)**  $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$  est la rotation de centre P (le point d'intersection des droites  $(PF)$  et  $(PT_1)$ ) et d'angle  $2((PT_1), (PF))$ .

Maintenant,  $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1) = \mathcal{S}_{(PF)}(F) = F$ . Donc  $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$  est aussi la rotation de centre P et d'angle  $(\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF})$ .

**3.3.b)**  $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$  est la rotation de centre P et d'angle  $2((PF'), (PT_2))$ .

Mais puisque la droite  $(PF')$  est la médiatrice du segment  $[F_1F_2]$ ,  $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}(F_1) = \mathcal{S}_{(PT_2)}(F_2) = F$  et donc  $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$  est aussi la rotation de centre P et d'angle  $(\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF'})$ . Finalement, les deux rotations sont égales. Elles ont en particulier même angle. Par suite,  $2((PT_1), (PF)) = 2((PF'), (PT_2)) [2\pi]$  puis  $((PT_1), (PF)) = ((PF'), (PT_2)) [\pi]$ .

On a montré que les angles de droites  $((PT_1), (PF))$  et  $((PF'), (PT_2))$  sont égaux.

#### 4) Etude du cas où $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral

**4.1)** Il s'agit de vérifier que le milieu I du segment  $[M_1M_2]$  n'appartient pas au segment  $[FF']$ . Dans le cas contraire, puisque les points F et F' sont d'un même côté de la droite  $(M_1M_2)$ , les points F et F' seraient sur la droite  $(M_1M_2)$ . Mais le calcul de la question C.2.2), montre que F et F' sont barycentres à coefficients strictement positifs des points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  et donc n'appartiennent pas à la droite  $(M_1M_2)$  puisque les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ne sont pas alignés. On aboutit à une contradiction et donc le milieu I du segment  $[M_1M_2]$  n'appartient pas au segment  $[FF']$ . Mais alors, il existe une ellipse de foyer F et F' passant par le milieu I du segment  $[M_1M_2]$ .

**4.2) 4.2.a)** D'après la question C.2.1),

$$\begin{aligned}
3(X-w)(X-w') &= f'(X) = f(X) \left( \frac{1}{X-r_1} + \frac{1}{X-r_2} + \frac{1}{X-r_3} \right) \\
&= (X-r_1)(X-r_2) + (X-r_2)(X-r_3) + (X-r_3)(X-r_1).
\end{aligned}$$

**4.2.b)** En évaluant en  $\frac{r_1+r_2}{2}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
3 \left( w - \frac{r_1+r_2}{2} \right) \left( w' - \frac{r_1+r_2}{2} \right) &= \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_1 \right) \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_2 \right) + \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_2 \right) \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_3 \right) \\
&\quad + \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_3 \right) \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_1 \right) \\
&= -\frac{(r_2-r_1)^2}{4} + \frac{r_1-r_2}{2} \left( \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_3 \right) - \left( \frac{r_1+r_2}{2} - r_3 \right) \right) = \frac{(r_1-r_2)(r_2-r_1)}{4},
\end{aligned}$$

et donc  $12 \frac{w - \frac{r_1+r_2}{2}}{r_1-r_2} = \frac{r_2-r_1}{w' - \frac{r_1+r_2}{2}}$ .

En passant aux arguments (et en notant I le milieu de  $[M_1M_2]$ ), on obtient  $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{M_2M_1})$  ou encore  $(\overrightarrow{IM_2}, \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{IM_1})$ . Cette dernière égalité signifie que la droite  $(M_1M_2)$  est bissectrice extérieure de l'angle  $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IF'})$  et donc que la droite  $(M_1M_2)$  est tangente à l'ellipse  $\mathcal{E}$  en I.

### 4.3)

**4.3.a)** En évaluant en  $r_1$  l'égalité de la question 4.2.a), on obtient  $3(r_1-w)(r_1-w') = (r_1-r_2)(r_1-r_3)$  et donc  $\frac{r_2-r_1}{w-r_1} = 3 \frac{w'-r_1}{r_3-r_1}$ .

**4.3.b)** En passant aux arguments, on obtient  $(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1F'}) = (\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1M_2})$ . Par suite, les angles de droites  $((M_1M_2), (M_1F))$  et  $((M_1M_3), (M_1F'))$  sont les mêmes. D'après la question 3.3), la deuxième tangente issue de  $M_1$  fait avec la droite  $(M_1F')$  le même angle que la droite  $(M_1M_3)$  fait avec la droite  $(M_1F')$  et donc ces droites sont confondues. On a montré que la droite  $(M_1M_3)$  est tangente à  $\mathcal{E}$ .

**4.4)** En échangeant les rôles de  $M_1$  et  $M_3$ , on peut aussi considérer une ellipse  $\mathcal{E}'$  de foyer F et  $F'$  passant par le milieu J du segment  $[M_1M_3]$ . Alors, la droite  $(M_1M_3)$  est tangente à  $\mathcal{E}'$  en J et la droite  $(M_1M_2)$  est l'autre tangente à  $\mathcal{E}'$  issue de  $M_1$ .

D'après la question 3), en notant  $F_1$  le symétrique de F par rapport à la droite  $(M_1M_2)$  et  $F_2$  le symétrique de F par rapport à la droite  $(M_1M_3)$ , le point de contact de l'ellipse  $\mathcal{E}$  avec la droite  $(M_1M_3)$  est le point d'intersection de la droite  $(F_1F_2)$  et de la droite  $(M_1M_3)$ . La question 3) appliqué à l'ellipse  $\mathcal{E}'$  montre que ce point d'intersection est le milieu du segment  $[M_1M_3]$  et donc l'ellipse  $\mathcal{E}$  est tangente au segment  $[M_1M_3]$  en son milieu.

Ainsi, les droites  $(M_1M_2)$  et  $(M_1M_3)$  sont tangentes à l'ellipse  $\mathcal{E}$  en les milieux des segments  $[M_1M_2]$  et  $[M_1M_3]$  respectivement. En échangeant les rôles de  $M_1$  et  $M_2$ , l'ellipse  $\mathcal{E}$  qui est tangente au segment  $[M_1M_2]$  en son milieu, est aussi tangente au segment  $[M_2M_3]$  en son milieu. Finalement,  $\mathcal{E}$  est une ellipse de foyers F et  $F'$  tangente aux trois côtés du triangle  $M_1M_2M_3$  et les points de contact sont les milieux de ces segments.