SESSION 2009

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

I - Intégrales de Wallis et formule de Stirling

I.1. Intégrales de Wallis.

I.1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est un C^1-difféomorphisme de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même. En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, on obtient

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\, (-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt.$$

I.1.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^n(x) - \cos^{n+1}(x) = \cos^n(x)(1 - \cos(x)) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \cos^n(x) - \cos^{n+1}(x)$ est continue, positive et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos^n(x) - \cos^{n+1}(x))\, dx > 0,$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} < W_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

I.1.c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \times \cos^{n+1}(x)\, dx = \left[\sin(x)\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \times (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)\, dx \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^n(x)\, dx \text{ (car } n+1 \geqslant 1) \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x))\cos^n(x)\, dx = (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)\, dx\right) \\
&= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right),
\end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ puis $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)W_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)W_n.}$$

I.1.d) $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = [-\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2}W_0 = \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} W_1 = \frac{((2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},
\end{aligned}
$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$
\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}
$$

I.1.e) D'après la question I.1.c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+1} = (n+1)W_n$ puis, en multipliant les deux membres par W_{n+1}, $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. Ainsi, la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. On en déduit que pour tout entier naturel n, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$.

$$
\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}.}
$$

I.1.f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord $W_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle).
Ensuite, d'après la question I.1.b), $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$. En divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif W_n, on obtient (à l'aide de la question I.1.c))

$$
1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{W_n}{W_n} = 1.
$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et donc que

$$
\boxed{W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n.}
$$

I.1.g) D'après les questions question I.1.e), $\dfrac{\pi}{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(n+1)} = W_n W_{n+1} \sim W_n^2$, et puisque $W_n > 0$,

$$
W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.
$$

$$
\boxed{W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ et en particulier } \lim_{n \to +\infty} W_n = 0.}
$$

I.2. Formule de Stirling.

I.2.a) Soit $n \geqslant 2$.

$$
v_n = \ln(u_n - u_{n-1}) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!e^{n-1}}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).
$$

Par suite,

$$
v_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
$$

$$
\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{=} -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}
$$

I.2.b) En particulier, $v_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on en déduit que la série de terme général v_n, $n \geqslant 2$, converge absolument et donc converge.

Maintenant, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} (\ln(u_k) - \ln(u_{k-1})) = \ln(u_n) - \ln(u_1) = \ln(u_n) - 1$ (somme télescopique). Donc, $\forall n \geqslant 2$, $\ln(u_n) = 1 + v_n$ et la suite $(\ln(u_n))$ converge. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$ puis $K = e^\ell > 0$.

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\to} e^\ell = K.$$

Puisque K n'est pas nul, on peut alors écrire $\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K$ ou encore $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

I.2.c) D'après la question I.1.d),

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{\pi}{2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{K\left(\dfrac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}K^2\left(\dfrac{p}{e}\right)^{2p}(\sqrt{p})^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K\sqrt{2}\sqrt{p}}.$$

D'autre part, d'après la question I.1.g), $W_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$ et on en déduit que $\dfrac{\pi}{K\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc que $K = \sqrt{2\pi}$. Finalement,

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.}$$

I.3. Une autre application des intégrales de Wallis.

I.3.a) Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{B}_n &\Leftrightarrow x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2\leqslant R^2 \Leftrightarrow x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2\leqslant R^2 \text{ et } x_n^2\leqslant R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2\\
&\quad(\text{car } x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2\leqslant R^2\Rightarrow x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqslant R^2)\\
&\Leftrightarrow (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathcal{B}_n \text{ et } x_n^2\leqslant R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathcal{B}_{n-1}\\ \quad\quad\text{et}\\ -\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

- $\mathcal{B}_1 = [-R,R]$ est continûment paramétrable.
- Soit $n\geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{B}_{n-1}$ soit continûment paramétrable. D'après ce qui précède,

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n/\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathcal{B}_{n-1} \text{ et } -\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}\}.$$

Comme $\mathcal{B}_{n-1}$ est continûment paramétrable par hypothèse de récurrence et que les deux fonctions $(x_1,\ldots,x_{n-1})\mapsto -\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}$ et $(x_1,\ldots,x_{n-1})\mapsto\sqrt{R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}$ sont continues sur $\mathcal{B}_{n-1}$ (car la fonction $(x_1,\ldots,x_{n-1})\mapsto R^2-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2$ est continue sur $\mathcal{B}_{n-1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et la fonction $y\mapsto\sqrt{y}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$), on en déduit que $\mathcal{B}_n$ est continûment paramétrable.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathcal{B}_n \text{ est continûment paramétrable.}}$$

I.3.b) Soient $\lambda>0$ et $m\in\mathbb{N}$. La fonction $\varphi\ :\ t\mapsto\lambda\sin t$ est de classe C^1 sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et la fonction $x\mapsto(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue sur $\varphi\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [-\lambda,\lambda]$. On peut donc poser $x=\varphi(t)$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}\ dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\lambda^2-\lambda^2\sin^2 t)^{\frac{m}{2}}\,\lambda\cos t\ dt = \lambda^{m+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^{\frac{m}{2}}\ \cos t\ dt\\
&= \lambda^{m+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{m+1}t\ dt\\
&= 2\lambda^{m+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{m+1}t\ dt \text{ (car la fonction } t\mapsto\cos t \text{ est paire)}\\
&= 2\lambda^{m+1}W_{m+1}.
\end{aligned}$$

I.3.c) Soit $n\geqslant 2$.

- D'après la question I.3.a),

$$\begin{aligned}
V_n &= \int\dots\int_{\mathcal{B}_n} dx_1\dots dx_n = \int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-1}}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} dx_n\right) dx_1\dots dx_{n-1}\\
&= 2\int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-1}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} dx_1\dots dx_{n-1}\\
&= 2W_1\int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-1}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2\right)^{\frac{1}{2}} dx_{n-1}\dots dx_1.
\end{aligned}$$

La formule proposée est donc vraie quand $k=1$.

• Soit $k\in[\![1,n-2]\!]$. Supposons que $V_n = 2^k\left(\prod_{i=1}^{k} W_i\right)\int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-k}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k}\dots dx_1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
&\int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-k}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k}\dots dx_1\\
&\quad= \int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-k-1}}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k-1}^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k-1}^2}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k}\right) dx_{n-k-1}\dots dx_1\\
&\quad= \int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-k-1}}\left(2\left(\sqrt{R^2-x_1^2-\dots-x_{n-k-1}^2}\right)^{k+1} W_{k+1}\right) dx_{n-k-1}\dots dx_1\\
&\quad= 2W_{k+1}\int_{\mathcal{B}_{n-(k+1)}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-(k+1)}^2\right)^{\frac{k+1}{2}} dx_{n-k-1}\dots dx_1,
\end{aligned}$$

et donc

$$V_n = 2^{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k+1} W_i\right)\int\dots\int_{\mathcal{B}_{n-(k+1)}}\left(R^2-x_1^2-\dots-x_{n-(k+1)}^2\right)^{\frac{k+1}{2}} dx_{n-(k+1)}\dots dx_1.$$

Le résultat est démontré par récurrence sur k.

I.3.d) $V_1 = \int_{-R}^{R} dx_1 = 2R = W_1\times(2R)^1$.
Soit alors $n\geqslant 2$. Le résultat de la question précédente appliqué à $k=n-1$ fournit

$$\begin{aligned}
V_n &= 2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} W_i\right)\int_{-R}^{R}(R^2-x_1^2)^{n-1}2dx_1\\
&= 2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1} W_i\right)\times 2R^{n-1+1}W_{n-1+1}\ \text{(d'après la question I.3.b)}\\
&= (2R)^n\left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ V_n = (2R)^n\left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right).}$$

• Soit $k\in\mathbb{N}^*$. D'après la question I.1.e), $\forall i\in\mathbb{N}$, $W_iW_{i+1} = \dfrac{\pi}{2(i+1)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
V_{2k} &= (2R)^{2k}\left(\prod_{i=1}^{2k} W_i\right) = (2R)^{2k}\left(\prod_{p=1}^{k} W_{2p-1}W_{2p}\right)\\
&= (2R)^{2k}\left(\prod_{p=1}^{k}\frac{\pi}{2\times(2p)}\right) = \frac{(2R)^{2k}\pi^k}{2^{2k}k!} = \frac{\pi^k}{k!}R^k.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}R^k.}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}V_{2k+1} &= \left(\prod_{i=1}^{2k+1} W_i\right)(2R)^{2k+1} = \left(\prod_{i=1}^{2k} W_i\right)(2R)^{2k} \times 2RW_{2k+1}\\ &= V_{2k} \times 2R\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} \text{ (d'après la question I.1.d))}\\ &= \frac{\pi^k}{k!}R^k \times 2R\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = 2^{2k+1}\frac{k!}{(2k+1)!}\pi^k R^{2k+1}.\end{aligned}$$

En tenant compte de $V_1 = 2R$, on a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ V_{2k+1} = 2^{2k+1}\frac{k!}{(2k+1)!}\pi^k R^{2k+1}.}$$

Remarque. On pouvait aussi ne pas utiliser la question I.1.d) en écrivant

$$W_{2k+1} = \left(\prod_{i=2}^{2k+1} W_i\right)(2R)^{2k+1} = \left(\prod_{p=1}^{k} W_{2p}W_{2p+1}\right)(2R)^{2k+1}.$$

En particulier,

$$\boxed{V_1 = 2R,\ V_2 = \pi R^2,\ V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ et } V_4 = \frac{\pi^2}{2}R^4.}$$

I.3.e) D'après la formule de Stirling,

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}R^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{(\pi R)^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}} = \exp\left(-k\ln k + k\ln(e\pi R) - \frac{1}{2}\ln k - \ln(\sqrt{2\pi})\right),$$

Comme, $\lim\limits_{k\to+\infty} -k\ln k + k\ln(e\pi R) - \dfrac{1}{2}\ln k - \ln(\sqrt{2\pi}) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} V_{2k} = 0$.

Ensuite, d'après la question I.1.g),

$$V_{2k+1} = 2RW_{2k+1}V_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2R\sqrt{\frac{\pi}{2(2k+1)}}V_{2k}$$

et comme $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2k+1)}} = \lim\limits_{k\to+\infty} V_{2k} = 0$, on a encore $\lim\limits_{k\to+\infty} V_{2k+1} = 0$.

I.3.f) Les deux suites extraites (V_{2k}) et (V_{2k+1}) sont convergentes et ont même limite. On en déduit que la suite (V_n) converge et de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{k\to+\infty} V_{2k} = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = 0.}$$

I.3.g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $V_n \neq 0$ puis d'après la question I.3.d),

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n+1} W_i\right)(2P)^{n+1}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} W_i\right)(2P)^{n}} = 2RW_n.$$

Puisque la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle, il en est de même de la suite $(2RW_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $0 < 2RW_n < 1$. Soit $n_0 = \text{Min}\{n_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_1,\ 0 < 2RW_n < 1\}$ (n_0 existe car $\{n_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_1,\ 0 < 2RW_n < 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$). Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_{\ n}} = 2RW_n < 1$ et donc, puisque $V_n > 0$, $V_{n+1} < V_n$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante à partir du rang n_0.

Si $n_0 = 1$, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Sinon, $n_0 \geqslant 2$ puis $2RW_{n_0-1}\dfrac{V_{n_0}}{V_{n_0-1}} \geqslant 1$ par définition de n_0. Mais alors, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1$, puisque la suite $(2RW_n)$ est décroissante,

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2RW_n \geqslant 2RW_{n_0-1} \geqslant 1,$$

et donc, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1$, $V_{n+1} \geqslant V_n$.

En résumé, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit décroissante, soit croissante jusqu'à un certain rang n_0 puis décroissante.

I.3.h) Puisque la suite $\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante,

$$(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroissante} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{V_{n+1}}{V_n} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2RW_1 \leqslant 1 \Leftrightarrow R \leqslant \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante si et seulement si } 0 < R \leqslant \frac{1}{2}.}$$

I.3.i) Supposons $R = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2W_n \geqslant 1 \Leftrightarrow W_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

Maintenant, d'après la question I.1.d),

$$W_5 = \frac{2^4 \times 2^2}{5!} = \frac{2^6}{120} = \frac{8}{15} \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } W_6 = \frac{6!}{2^6 6^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 3\times 4\times 5\times 6}{2^6 2^2 3^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32} = 0,4\ldots < \frac{1}{2}$$

Par suite, $\dfrac{V_6}{V_5} \geqslant 1$ et $\dfrac{V_7}{V_6} < 1$. Donc, si $R = 1$, alors $n_0 = 6$.

II - Polynômes et nombres de Bernoulli

II.1. Définitions.

II.1.a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme Q cherché est nécessairement une primitive du polynôme P.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons donc $Q_0(x) = \displaystyle\int_0^x P(t)\ dt$ (Q_0 est la primitive de P qui s'annule en 0). Q_0 est un polynôme et les primitives de P sont les polynômes $Q = Q_0 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\int_0^1 Q(t)\ dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (Q_0(t) + \lambda)\ dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\int_0^1 Q_0(t)\ dt.$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'un polynôme Q vérifiant $Q' = P$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\ dx$ à savoir le polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_0^x P(t)\ dt - \int_0^1 \left(\int_0^x P(t)\ dt\right) dx.$$

II.1.b) • B_0 existe, est un polynôme et est uniquement défini.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir démontré l'existence et l'unicité du polynôme B_{n-1}. Alors, d'après la question précédente, il existe un polynôme B_n et un seul tel que $B_n' = nB_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\ dx = 0$.

On a montré par récurrence l'existence et l'unicité de la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.1.c) • $B_0(X) = 1$ et $b_0 = 1$.

• Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_1(X) = X + a$. De plus, $0 = \displaystyle\int_0^1 (x + a)\ dx = \frac{1}{2} + a$ et donc $a = -\dfrac{1}{2}$. Par suite $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$ et $b_1 = -\dfrac{1}{2}$.

• $B_2'(X) = 2B_1(X) = 2X - 1$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_2(X) = X^2 - X + a$. De plus, $0 = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - x + a)\ dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a$ et donc $a = \dfrac{1}{6}$. Par suite $B_2(X) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$ et $b_2 = \dfrac{1}{6}$.

• $B_3'(X) = 3B_2(X) = 3X^2 - 3X + \dfrac{1}{2}$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_3(X) = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + a$.
De plus, $0 = \displaystyle\int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + a\right)\ dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + a$ et donc $a = 0$. Par suite $B_3(X) = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ et $b_3 = 0$.

• $B_4'(X) = 4B_3(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2X$ et donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 + a$.
De plus, $0 = \displaystyle\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2 + a)\ dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a$ et donc $a = -\dfrac{1}{30}$. Par suite $B_3(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \dfrac{1}{30}$ et $b_4 = -\dfrac{1}{30}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} B_0(X)=1,\ B_1(X)=X-\dfrac{1}{2},\ B_2(X)=X^2-X+\dfrac{1}{6},\ B_3(X)=X^3-\dfrac{3}{2}X^2+\dfrac{1}{2}X \text{ et } B_4(X)=X^4-2X^3+X^2-\dfrac{1}{30}.\\ b_0=1,\ b_1=-\dfrac{1}{2},\ b_2=\dfrac{1}{6},\ b_3=0 \text{ et } b_4=-\dfrac{1}{30}.\end{array}}$$

II.2. Premières propriétés.

II.2.a) B_0 et de degré 0 et si pour $n\in\mathbb{N}^*$, B_{n-1} est de degré $n-1$, alors $B'_n=nB_{n-1}$ est de degré $n-1\in\mathbb{N}$ puis B_n est de degré n. On a mongtré par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ B_n \text{ est de degré } n.}$$

II.2.b) Soit $n\geqslant 2$.

$$B_n(1)-B_n(0)=\int_0^1 B'_n(x)\ dx=n\int_0^1 B_{n-1}(x)\ dx=0 \text{ car } n-1\geqslant 1.$$

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ B_n(0)=B_n(1).}$$

II.2.c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note tout d'abord que pour $k\in[\![1,n]\!]$, $B_n^{(k)}=n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$ ce qui reste vrai pour $k=0$ puis $n=0$.

La formule de Taylor pour les polynômes permet alors d'écrire

$$B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}X^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{B_{n-k}(0)}{k!}X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}X^k.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k.}$$

II.2.d) Soit $n\geqslant 1$. L'égalité $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\ dt=0$ fournit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1}=0$ et donc $\displaystyle b_n=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1}.}$$

On retrouve

- $b_2=-\left(2\times\dfrac{b_1}{2}+\dfrac{b_0}{3}\right)=\dfrac{1}{6}$.
- $b_3=-\left(3\times\dfrac{b_2}{2}+3\times\dfrac{b_1}{3}+\dfrac{b_0}{4}\right)=-\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)=0$
- $b_4=-\left(4\times\dfrac{b_3}{2}+6\times\dfrac{b_2}{3}+4\times\dfrac{b_1}{4}+\dfrac{b_0}{5}\right)=-\left(0+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{1}{30}$

puis

- $b_5=-\left(5\times\dfrac{b_4}{2}+10\times\dfrac{b_3}{3}+10\times\dfrac{b_2}{4}+5\times\dfrac{b_1}{5}+\dfrac{b_0}{6}\right)=-\left(-\dfrac{1}{12}+0+\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right)=0$.
- $b_6=-\left(6\times\dfrac{b_5}{2}+15\times\dfrac{b_4}{3}+20\times\dfrac{b_3}{4}+15\times\dfrac{b_2}{5}+6\times\dfrac{b_1}{6}+\dfrac{b_0}{7}\right)=-\left(0-\dfrac{1}{6}+0+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{42}$.

$$\boxed{b_5=0 \text{ et } b_6=\frac{1}{42}.}$$

II.2.e) $b_0=1$ est un rationnel et si pour $n\geqslant 1$, on a $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $b_k\in\mathbb{Q}$, alors $\displaystyle b_n=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{b_{n-k}}{k+1}\in\mathbb{Q}$. Ceci montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n\in\mathbb{Q}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Les nombres $\dbinom{n}{k}b_{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$, sont rationnels et donc le polynôme B_n est à coefficients rationnel.

II.2.f) • $C_0(X) = B_0(X) = 1$.
• Pour $n \geqslant 1$, $C'_n(X) = (-1)^n \times -B'_n(1-X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-X) = nC_{n-1}(X)$.
• Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^1 C_n(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)\,dt = (-1)^n \int_1^0 B_n(u) \times -du = 0$.

Par unicité de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n(X) = B_n(X)$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X).}$$

II.2.g) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $B_{2n+1}(1-X) = -B_{2n+1}(X)$ $(*)$. En évaluant en $\dfrac{1}{2}$, on obtient $B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc $B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En évaluant en 0 les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient aussi $B_{2n+1}(1) = -B_{2n+1}(0)$. Mais d'après la question II.2.b), pour $p \geqslant 2$, on a $B_p(1) = B_p(0)$ et en particulier, puisque $2n+1 \geqslant 1$, $B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0)$. On en déduit que $B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$ et donc que $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n+1} = 0.}$$

II.3. Etude des variations de B_n sur $[0,1]$.

II.3.a) On sait que l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle est strictement positive. Donc si P est un polynôme non nul et positif sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt > 0$. De même si P est un polynôme non nul et négatif sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt < 0$. Dans tous les cas, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt \neq 0$.

II.3.b) Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{P}_n$ la liste des six propriétés de l'énoncé.

• $(-1)^1 B_2(1) = (-1)^1 B_2(0) = -\dfrac{1}{6} < 0$ et $(-1)^1 B_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{12} > 0$.

Ensuite, pour $x \in [0,1]$, $(-1)^1 B_2(x) = -\left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12}$ et donc la fonction $(-1)^1 B_2$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. De plus, $(-1)^1 B_2$ est strictement négative sur $\left[0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{12}}, 1\right]$ et strictement positive sur $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right]$.

Puisque $((-1)^1 B_3)' = 3(-1)^1 B_2$, on en déduit que la fonction $(-1)^1 B_3$ est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right]$, strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{12}}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{12}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{12}}, 1\right]$. Enfin, d'après la question II.2.g), $(-1)^1 B_3(0) = (-1)^1 B_3(1) = (-1)^1 B_3\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Donc, $\mathscr{P}_1$ est vraie.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie.
$((-1)^{n+1} B_{2n+2})' = (2n+2)(-1)^{n+1} B_{2n+1} = -(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$. Par hypothèse de récurrence, la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$ et strictement croissante sur $\left[\alpha_{2n+1}, \dfrac{1}{2}\right]$ avec $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Donc la fonction $-(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. De même, la fonction $-(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

On en déduit que la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Ensuite, $\displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x)\,dx = 0$ et d'après la question II.3.a), la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ ne peut être de signe constant sur $[0,1]$. On ne peut avoir $(-1)^{n+1} B_{2n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ car alors la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}$ serait négative sur $[0,1]$. De même, on ne peut avoir $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = 0$ car alors la fonction $(-1)^{n+1} B_{2n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ serait positive sur $[0,1]$.

Donc, $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) \times (-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et puisque la fonction est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et n'est pas de signe constant sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0$ et $(-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

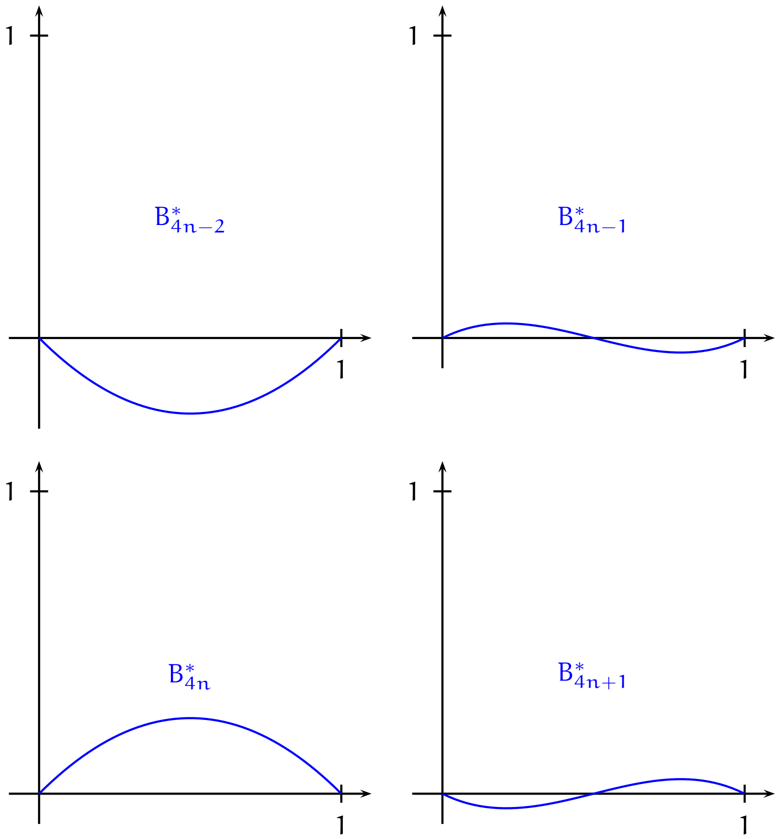
$((-1)^{n+1}B_{2n+3})' = (2n+3)(-1)^{n+1}B_{2n+2}$. Mais d'après ce qui précède, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et vérifie $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) \times (-1)^{n+1}B_{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. On en déduit que la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ s'annule une et une seule fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en un certain réel réel α_{2n+3} et de plus, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est strictement négative sur $[0, \alpha_{2n+3}[$ et strictement positive sur $\left]\alpha_{2n+3}, \frac{1}{2}\right]$. Mais alors, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+3}[$ et strictement croissante sur $\left[\alpha_{2n+3}, \frac{1}{2}\right]$. De même, puisque $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $B_{2n+3}(x) = -B_{2n+3}(1-x)$, en posant $\beta_{2n+3} = 1 - \alpha_{2n+3}$, la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, \beta_{2n+3}\right]$ et strictement décroissante sur $[\beta_{2n+3}, 1]$.

Finalement, il existe deux réels $\alpha_{2n+3} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\beta_{2n+3} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tels que la fonction $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+3}]$, strictement décroissante sur $[\alpha_{2n+3}, \beta_{2n+3}]$ et strictement décroissante sur $[\beta_{2n+3}, 1]$. Enfin, les égalités $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}(1) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ sont connues.

Le résultat est démontré par récurrence.

II.3.c) D'après la question précédente, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{p+1}b_{2p} > 0$ et donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, le signe de b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

II.3.d) Graphes.



II.4. Une application arithmétique.

II.4.a) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_{n+1}(x) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

• Pour tout réel x, $B_1(x+1) - B_1(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 = 1 \times x^0$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(x) - B_n(x) = nx^{n-1}$. Alors, pour tout réel x,

$$(B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x))' = (n+1)(B_n(x+1) - B_n(x)) = (n+1)nx^{n-1}.$$

Par suite, il existe un réel a tel que pour tout réel x, $B_{n+1}(x) - B_n(x) = (n+1)x^n + a$. Maintenant, $n+1 \geqslant 2$, et donc $B_{n+1}(1) - N_{n+1}(0) = 0$ d'après la question II.2.b). En évaluant en 0, on obtient $0 = (n+1)0^n + a = a$ (car $n \geqslant 1$) et donc pour tout réel x, $B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) - B_n(x) = nx^{n-1}.}$$

II.4.b) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $k^p = \dfrac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p &= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n}\left(B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)\right) \\
&= \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(N+1) - B_{p+1}(0)\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}.}$$

II.4.c) • Pour $N \in \mathbb{N}$, $S_1(N) = \dfrac{B_2(N+1) - b_2}{2} = \dfrac{(N+1)^2 - (N+1)}{2} = \dfrac{N(N+1)}{2}$.

• Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_2(N) = \dfrac{1}{3}\left((N+1)^3 - \dfrac{3}{2}(N+1)^2 + \dfrac{1}{2}(N+1)\right) = \dfrac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

• Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_3(N) = \dfrac{1}{4}\left((N+1)^4 - 2(N+1)^3 + (N+1)^2\right) = \dfrac{N^4 + 2N^3 + N^2}{4} = \dfrac{N^2(N+1)^2}{4}$.

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ S_1(N) = \frac{N(N+1)}{2},\ S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \text{ et } S_3(N) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.}$$

II.5. Une application analytique.

II.5.a) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. D'après la formule de Stirling,

$$\frac{|b_{2p}|}{(2p)!}t^{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}}{\left(\dfrac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{4\pi p}}t^{2p} = 2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2p}.$$

Par suite, si $|t| < 2\pi$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{|b_{2p}|}{(2p)!}t^{2p} = 0$ et dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{b_{2p}}{(2p)!}t^{2p}\right)$ est bornée (toute suite convergente est bornée) et si $|t| > 2\pi$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{|b_{2p}|}{(2p)!}t^{2p} = +\infty$ et dans ce cas, la suite $\left(\dfrac{b_{2p}}{(2p)!}t^{2p}\right)$ n'est pas bornée. Comme d'autre part $\forall p \geqslant 1$, $\dfrac{b_{2p+1}}{(2p+1)!}t^{2p+1} = 0$, la suite $\left(\dfrac{b_n t^n}{n!}\right)$ est bornée si $|t| < 2\pi$ et non bornée si $|t| > 2\pi$. On sait alors que la série entière de terme général $\dfrac{b_n t^n}{n!}$ a pour rayon 2π.

II.5.b) Soit $t \in]-2\pi, 2\pi[$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n t^n}{n!}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}\right) - b_n\right)t^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(B_n(1) - b_n\right)t^n \text{ (d'après la question II.2.c))} \\
&= (B_1(1) - b_0)t \text{ (d'après la question II.2.b))} \\
&= t.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\forall t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\},\ \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!}.}$$

Remarque. On peut prolonger la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. L'égalité précédente reste alors valable pour $t = 0$.

II.5.c) Pour tout réel x et tout réel $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{te^{xt}}{e^t-1} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!(n-k)!}x^k\right)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}x^k\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)t^n}{n!} \text{ (d'après la question II.2.c))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)t^n}{n!}.}$$

II.5.d) Ceci montre déjà que $R \geqslant 2\pi$ où R est la rayon de convergence de la série entière précédente. De plus, les calculs précédents restent valables si on remplace si on remplace le réel $t \in]-2\pi, 2\pi[\setminus\{0\}$ par un complexe z tel que $z \neq 0$ et $|z| < 2\pi$. En notant $D(0, 2\pi)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon 2π,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall z \in D(0, 2\pi) \setminus \{0\},\ \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)z^n}{n!}.$$

Maintenant, pour $x \in \mathbb{R}$ et $|z| < 2\pi$, $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)z^n}{n!}\right| = \left|\dfrac{ze^{xz}}{e^z-1}\right|$. Or $\left|\dfrac{ze^{xz}}{e^z-1}\right|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers $2i\pi$. Comme la somme d'une série entière doit être bornée sur tout disque fermé contenu dans son disque ouvert de convergence, on ne peut avoir $R > 2\pi$ et finalement $R = 2\pi$.

III - Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli.

III.1. Fonction ζ.

III.1.a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^s}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[k, k+1]$. Par suite,

$$\frac{1}{(k+1)^s} = (k+1-k) \times \frac{1}{(k+1)^s} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^s}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s}\,dx = \frac{1}{k^s}.$$

$$\boxed{\forall s > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^s} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^s}\,dx \leqslant \frac{1}{k^s}.}$$

Il est alors connu que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ converge si et seulement si $s > 1$ et de même la série de terme général $\dfrac{1}{k^s}$, $k \geqslant 1$, converge si et seulement si $s > 1$.

III.1.b) La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Soient s et s' deux réels tels que $1 < s < s'$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{n^{s'}} < \dfrac{1}{n^s}$ (car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$) et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{s'}} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ puis $\zeta(s') < \zeta(s)$.

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est définie et strictement décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

III.1.c) Soit $s > 1$. D'après la question a),

$$\zeta(s)-1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^s}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^s}\,dx\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}=\zeta(s).$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^s}\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\left[-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{s-1}$ et donc

$$\forall s>1,\ \frac{1}{s-1}\leqslant\zeta(s)\leqslant\frac{1}{z-1}+1.$$

Par suite, $\forall s>1$, $1\leqslant(s-1)\zeta(s)\leqslant1+(s-1)$ et le théorème des gendarmes montre que $\displaystyle\lim_{s\to1^+}(s-1)\zeta(s)=1$ ou encore que $\displaystyle\zeta(s)\underset{s\to1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}$. En particulier, $\displaystyle\lim_{s\to1^+}\zeta(s)=+\infty$.

$$\boxed{\zeta(s)\underset{s\to1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}\text{ et }\lim_{s\to1^+}\zeta(s)=+\infty.}$$

III.1.d) Soit $a>1$. Pour tout $s\geqslant a$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\frac{1}{n^s}\right|=\frac{1}{n^s}\leqslant\frac{1}{n^a}$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sup\left\{\left|\frac{1}{n^s}\right|,\ s\geqslant a\right\}\leqslant\frac{1}{n^a}$.
Puisque $a>1$, la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^a}$, $n\geqslant1$, converge et donc la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ s\mapsto\dfrac{1}{n^s}$, $n\in\mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction ζ sur $[a,+\infty[$.

• Soit $a>1$. Chaque fonction f_n est continue sur $[a,+\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant1$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $[a,+\infty[$. Donc la fonction ζ est continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a>1$, la fonction ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

• La série de fonction de terme général f_n, $n\geqslant1$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $[2,+\infty[$. De plus, chaque fonction f_n, $n\geqslant1$, a une limite quand s tend vers $+\infty$ à savoir $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}f_n(s)=\begin{cases}1\text{ si }n=1\\0\text{ si }n\geqslant2\end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, la fonction ζ a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{s\to+\infty}f_n(x)=1+0+0+\ldots=1.$$

$$\boxed{\text{La fonction }\zeta\text{ est continue sur }]1,+\infty[\text{ et }\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)=+\infty.}$$

III.1.e) Soit $s>0$. La suite $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}\right)$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. Donc, la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, $n\geqslant1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Ensuite, pour $s>1$,

$$\begin{aligned}\zeta(s)-\theta(s)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^s}\\&=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^s}=\frac{1}{2^{s-1}}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^s}\\&=\frac{1}{2^{s-1}}\zeta(s),\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall s>1,\ \theta(s)=\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).}$$

III.2. Calcul de $\zeta(2p)$.

III.2.a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle c_0(B_n)=\int_0^1B_n(x)\,dx=\begin{cases}1\text{ si }n=0\\0\text{ si }n\geqslant1\end{cases}$.

Soit $k\in\mathbb{Z}^*$. $\displaystyle c_k(B_0)=\int_0^1e^{-2ik\pi x}\,dx=0$. Ensuite, les deux fonctions B_1 et $x\mapsto e^{-2ik\pi x}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On peut donc effetuer une intégration par parties et on obtient

$$c_k(B_1) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2ik\pi x}\, dx = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-2ik\pi x}}{-2ik\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi}\int_0^1 e^{-2ik\pi x}\, dx = \frac{1}{-2ik\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 0 = -\frac{1}{2ik\pi}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
c_k(B_n) &= \int_0^1 B_n(x)e^{-2ik\pi x}\, dx = \left[B_n(x)\frac{e^{-2ik\pi x}}{-2ik\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2ik\pi}\int_0^1 B_n'(x)e^{-2ik\pi x}\, dx \\
&= 0 + \frac{n}{2ik\pi}\int_0^1 B_{n-1}(x)e^{-2ik\pi x}\, dx \text{ (pour } n \geqslant 2,\ B_n(1) = B_n(0)) \\
&= \frac{n}{2ik\pi} c_k(B_{n-1}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $c_k(B_n) = \dfrac{n}{2ik\pi} \times \dfrac{n-1}{2ik\pi} \times \dfrac{2}{2ik\pi} \times c_k(B_1) = -\dfrac{n!}{(2ik\pi)^n}$ ce qui reste vrai quand $n = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\forall n \in \mathbb{N},\ c_0(B_n) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 1 \end{array}\right., \\
\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ c_k(B_n) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n = 0 \\ -\dfrac{n!}{(2ik\pi)^n} \text{ si } n \geqslant 1 \end{array}\right.
\end{array}}$$

III.2.b) Tout d'abord, si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, puisque B_n est à coefficients réels

$$\overline{c_k(B_n)} = \overline{\int_0^1 B_n(x)e^{-2ik\pi x}\, dx} = \int_0^1 B_n(x)e^{2ik\pi x}\, dx = c_{-k}(B_n).$$

Par suite, pour n et m entiers naturels non nuls

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)B_m(x)\, dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(B_n)}c_k(B_m) \\
&= \overline{c_0(B_n)}c_0(B_m) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\overline{c_k(B_n)}c_k(B_m) + \overline{c_{-k}(B_n)}c_{-k}(B_m)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(c_{-k}(B_n)c_k(B_m) + c_k(B_n)c_{-k}(B_m)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{n!}{(-2ik\pi)^n}\frac{m!}{(2ik\pi)^m} + \frac{n!}{(2ik\pi)^n}\frac{m!}{(-2ik\pi)^m}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n!m!\,((-1)^n + (-1)^m)}{(2ik\pi)^{n+m}} \\
&= \frac{n!m!\,((-1)^n + (-1)^m)}{(2i\pi)^{n+m}}\zeta(n+m).
\end{aligned}$$

III.2.c) En particulier, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)\, dx = \frac{(2p-1)!\left((-1) + (-1)^{2p-1}\right)}{(2i\pi)^{2p}}\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1}(2p-1)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\zeta(2p)$.
D'autre part, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_1(x)B_{2p-1}(x)\, dx &= \left[B_1(x)\frac{B_{2p}(x)}{2p}\right]_0^1 - \frac{1}{2p}\int_0^1 B_{2p}(x)\, dx = \frac{1}{2p}\left(B_1(1)B_{2p}(1) - B_1(0)B_{2p}(0)\right) \\
&= \frac{b_{2p}}{2p}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{(-1)^{p+1}(2p-1)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\zeta(2p) = \dfrac{b_{2p}}{2p}$ et donc $\zeta(2p) = (-1)^{p+1}\dfrac{2^{2p-1}\pi^{2p}b_{2p}}{(2p)!} = (-1)^{p+1}\dfrac{b_{2p}}{2}\dfrac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \zeta(2p) = (-1)^{p+1}\frac{b_{2p}}{2}\frac{(2\pi)^{2p}}{(2p)!}.}$$

III.2.d) • $\zeta(2) = \dfrac{b_2}{2}\dfrac{(2\pi)^2}{2} = \dfrac{4\pi^2}{6 \times 2 \times 2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

• $\zeta(4) = -\dfrac{b_4}{2}\dfrac{(2\pi)^4}{24} = \dfrac{16\pi^4}{30 \times 2 \times 24} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

- $\zeta(6) = \dfrac{b_6}{2}\dfrac{(2\pi)^6}{720} = \dfrac{2^6\pi^6}{42\times 2\times 2.3.4.5.6} = \dfrac{\pi^6}{945}$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \theta(2) = \left(1-\frac{1}{2^1}\right)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \theta(4) = \left(1-\frac{1}{2^3}\right)\zeta(4) = \frac{7}{8}\times\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{720}$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6} = \theta(6) = \left(1-\frac{1}{2^5}\right)\zeta(6) = \frac{31}{32}\times\frac{\pi^6}{945} = \frac{31\pi^6}{30240}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^4}{90}+\frac{7}{8}\times\frac{\pi^4}{90}\right) = \frac{15}{16}\times\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^6}{945}+\frac{31}{32}\times\frac{\pi^6}{945}\right) = \frac{63}{64}\times\frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{960}$.

III.2.e) D'après la question III.1.c), $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\zeta(2p) = 1$. Par suite, d'après la formule de Stirling,

$$b_{2p} = (-1)^{p+1}\frac{(2p)!}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\zeta(2p) \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p+1}\frac{\left(\dfrac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{4p\pi}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} = (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}.$$

$$\boxed{b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi e}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}.}$$

III.2. Application numérique.

III.3.a) Soient $s > 1$ et $N \geqslant 1$.

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}\,dx = \int_N^{+\infty}\frac{1}{x^s}\,dx = \left[-\frac{1}{(s-1)x^{s-1}}\right]_N^{+\infty} = \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$

III.3.b) Soient $\epsilon > 0$ et $s > 1$. Pour tout entier naturel non nul N,

$$0 \leqslant \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \leqslant \frac{N^{1-s}}{s-1},$$

puis

$$0 \leqslant \zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} < \epsilon \Leftarrow \frac{N^{1-s}}{s-1} < \epsilon \Rightarrow N^{s-1} > \frac{1}{\varepsilon(s-1)} \Leftarrow N > \left(\frac{1}{\varepsilon(s-1)}\right)^{1/(s-1)}.$$

On peut prendre $N_0 = E\left(\left(\dfrac{1}{\varepsilon(s-1)}\right)^{1/(s-1)}\right)+1$.

III.3.c) Pour $s = 6$, on obtient en posant $N_0 = E\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{5\varepsilon}}\right)+1$, $0 < \dfrac{\pi^6}{945} - \displaystyle\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^6} < \epsilon$ et donc

$$945\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^6} < \pi^6 < 945\left(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^6}+\epsilon\right).$$

On choisit ϵ de sorte que $945\epsilon \leqslant 10^{-2}$. Par exemple, on peut prendre $\epsilon = 10^{-4}$.
On obtient $N_0 = E\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{5\times 10^{-4}}}\right)+1 = E\left(\sqrt[5]{2000}\right)+1 = 5$. Par suite, $A = 945\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^6}$ est une approximation rationnelle de π^6 à 10^{-2} près par défaut.

III.3.d) Par suite, $\sqrt[6]{945\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^6}} < \pi < \mathtt{sqrt[6]}945\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^6}+10^{-2}$ ou encore $3,141\ldots < \pi < 3,146\ldots$ et donc $3,14 < \pi < 3,15$. On a obtenu $\pi = 3,14\ldots$

IV - Formule de Stirling généralisée.

IV.1.

IV.1.a) Soit $n \geqslant 1$. $\dfrac{\Omega_{n+1}}{\Omega_n} = \dfrac{(n+1)!}{\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}\sqrt{2\pi(n+1)}} \times \dfrac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!} = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$. Soit alors $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\ln\Omega_N &= \ln\Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1}(\ln\Omega_{k+1} - \ln\Omega_k) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \ln\Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = \ln\Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\\ &= \ln\Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

IV.1.b) Soit $t \in]-1,1] \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+t) &= \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n}\right)t^n\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{2n(n+1)}t^n.\end{aligned}$$

Ainsi, si pour $t \in]-1,+\infty[$, on pose $\varphi(t) = \begin{cases}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+t) \text{ si } t \neq 0 & 0 \text{ si } t = 1\end{cases}$, alors $\forall t \in]-1,1]$, $\varphi(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n-1}{2n(n+1)}t^n$.

Puisque $\left|(-1)^n\dfrac{n-1}{2n(n+1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, le rayon de convergence de la série précédente est 1.

IV.1.c) Soient $N \geqslant 2$ puis $n \in [\![1, N-1]\!]$.

$$1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{n^k}$$

et donc

$$\begin{aligned}\ln\Omega_N &= \ln\Omega_1 + \sum_{n=1}^{N-1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{n^k}\right) \text{ (somme de } N-1 \text{ séries convergentes)}\\ &= \ln\Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^k}\right) = \ln\Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\zeta(k) - \sum_{n\geqslant N}\frac{1}{n^k}\right).\end{aligned}$$

IV.1.d) La fonction ζ est décroissante et positive sur $]1,+\infty[$. Donc, la suite $(\zeta(k))_{k\geqslant 2}$ est décroissante et positive.
D'autre part, pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{k}{2(k+1)(k+2)} - \dfrac{k-1}{2k(k+1)} = \dfrac{k^2-(k-1)(k+2)}{2k(k+1)(k+2)} = \dfrac{-k+2}{2k(k+1)(k+2)} \leqslant 0$. Donc la suite $\left(\dfrac{k-1}{2k(k+1)}\right)_{k\geqslant 2}$ est décroissante et positive. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k)\right)_{k\geqslant 2}$ est décroissante et positive en tant que produit de deux suites décroissantes et positives.
Enfin, $\lim\limits_{k\to+\infty}\zeta(k) = 1$ d'après la question III.1.d) et donc $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) = 0$.

En résumé, la suite $\left((-1)^{k+1}\dfrac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k)\right)_{k\geqslant 2}$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant.

Donc la série de terme général $(-1)^{k+1}\dfrac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k)$, $k \geqslant 2$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

IV.1.e) Pour $N \geqslant 2$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\ln \Omega_N &= \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\sum_{n\geqslant N}\frac{1}{n^k}\right)\\ &= \ln \Omega_1 + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) - \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N).\end{aligned}$$

IV.2.

IV.2.a) Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$.

$$\sum_{n\geqslant N}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^k}\,dx \leqslant \sum_{n\geqslant N}\frac{1}{n^k} = R_k(N) = \frac{1}{N^k} + \sum_{n\geqslant N+1}\frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{n\geqslant N+1}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^k}\,dx + \frac{1}{N^k}$$

et donc $\displaystyle\int_N^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx \leqslant R_k(N) \leqslant \int_N^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx + \frac{1}{N^k}$ ou enfin

$$\frac{1}{(k-1)N^{k-1}} \leqslant R_k(N) \leqslant \frac{1}{(k-1)N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}.$$

IV.2.b) Soient $p \geqslant 3$ et $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)\right| &\leqslant \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N) \leqslant \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{k-1}{2k(k+1)}\left(\frac{1}{(k-1)N^{k-1}} + \frac{1}{N^k}\right)\\ &= \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2k(k+1)}\frac{1}{N^{k-1}} + \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{k-1}{2k(k+1)}\frac{1}{N^k}\\ &\leqslant \frac{1}{N^{p-1}}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2k(k+1)} + \sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{N^k} = \frac{1}{N^{p-1}}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2k(k+1)} + R_p(N)\\ &\leqslant \frac{1}{N^{p-1}}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{(p-1)N^{p-1}} + \frac{1}{N^p},\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle N^{p-2}\left|\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{1}{2k(k+1)} + \frac{1}{(p-1)N} + \frac{1}{N^2}$.

Par suite, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N^{p-2}\left|\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)\right| = 0$ et finalement

$$\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N) \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{N^{p-2}}\right).$$

IV.3. D'après la formule de STIRLING, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\Omega_N = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\ln(\Omega_N) = 0$. Ensuite, d'après la question précédente $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N) \underset{N\to+\infty}{=} o(1)$. En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'égalité de la question IV.1.e), on en déduit que

$$0 = \lim_{N\to+\infty}\ln(\Omega_N) = \ln(\Omega_1) + \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) + 0,$$

et donc que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}\zeta(k) = \ln(\Omega_1) = \ln\left(\frac{e}{\sqrt{2\pi}}\right) = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

IV.3.a) On en déduit aussi que pour tout $N \geqslant 2$,

$$\ln(\Omega_n) = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N).$$

IV.3.b) Soit $p \geqslant 1$. D'après la question IV.2.b)

$$\ln(\Omega_N) = \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + \sum_{k=p+2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) \underset{N\to+\infty}{=} \sum_{k=2}^{p+1} (-1)^k \frac{k-1}{2k(k+1)} R_k(N) + o\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

Par suite, si les suites $(R_2(N))$, ..., $(R_{p+1}(N))$ admettent des développements limités en $\frac{1}{N}$ à l'ordre p, il en est de même de la suite $(\ln(\Omega_N))$.

IV.3.c) D'après ce qui précède, $\ln(\Omega_N) \underset{N\to+\infty}{=} (-1)^2 \frac{2-1}{2\times 2(2+1)} R_2(N) + o\left(\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{R_2(N)}{12} + o\left(\frac{1}{N}\right)$.
Maintenant, d'après la question IV.2.a), pour tout $N \geqslant 2$, $\frac{1}{N} \leqslant R_2(N) \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}$. Par suite, $\lim\limits_{N\to+\infty} NR_2(N) = 1$ et donc $R_2(N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$. Par suite,

$$\ln(\Omega_N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Mais alors

$$\Omega_N = e^{\ln \Omega_N} \underset{N\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \underset{N\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).}$$

IV.4.

IV.4.a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{N} = \sum_{n=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ (série télescopique convergente). Par suite,

$$R_2(N) - \frac{1}{N} = \sum_{n\geqslant N} \frac{1}{n^2} - \sum_{n\geqslant N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n\geqslant N} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n\geqslant N} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

IV.4.b) Soit $N \geqslant 2$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2(x+1)}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx = \sum_{n\geqslant N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx \leqslant \sum_{n\geqslant N} \frac{1}{n^2(n+1)} \leqslant \sum_{n\geqslant N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx = \int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx &= \int_N^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]_N^{+\infty} = \frac{1}{N} - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &\underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)\end{aligned}$$

et donc aussi $\int_{N-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{2(N-1)^2} + o\left(\frac{1}{(N-1)^2}\right) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Par suite,

$$R_2(N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Ensuite, d'après la question IV.2.a), $R_3(N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{2N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\ln(\Omega_N) &= \frac{R_2(N)}{12} - \frac{R_3(N)}{12} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{12}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2}\right) - \frac{1}{24N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &\underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{12N} + o\left(\frac{1}{N^2}\right),\end{aligned}$$

puis

$$\Omega_N \underset{N\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{12N}+o\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = 1+\frac{1}{12N}+\frac{1}{288N^2}+o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).}$$

IV.4.c) On veut effectuer un développement limité de Ω_N en $\frac{1}{N}$ à l'ordre $p \geqslant 1$.

On écrit déjà $\Omega_N \underset{N\to+\infty}{=} \exp\left(\sum_{k=2}^{p+1}(-1)^k\frac{k-1}{2k(k+1)}R_k(N)\right)+o\left(\frac{1}{N^p}\right)$. Il s'agit alors d'obtenir un développement limité de Ω_N en $\frac{1}{N}$ à l'ordre p de chaque $R_k(N)$, $1 \leqslant k \leqslant p+1$.

On démarre avec la question IV.2.a qui fournit $R_k(N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}+o\left(\frac{1}{N^{k-1}}\right)$ puis on obtient la différence $R_k(N)-\frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$ comme somme d'une série que l'on compare à une intégrale généralisée pour obtenir un équivalent de $R_k(N)-\frac{1}{(k-1)N^{k-1}}$. Puis on réitère pour obtenir le terme en $\frac{1}{N^k}$ ...

