SESSION 2008

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

A - UNE ESTIMATION À LA TCHEBYCHEV

I. Une minoration de la fonction π

A.I.1.

A.I.1.a) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $I(1,a) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{a-1}\,dx = \left[-\frac{1}{a}(1-x)^a\right]_0^1 = \frac{1}{a}$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}^*,\ I(1,a) = \frac{1}{a}.}$$

A.I.1.b) Soient a et b deux entiers naturels tels que $1 \leqslant b < a$. Les deux fonctions $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto -\dfrac{(1-x)^{a-b}}{a-b}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I(b+1,a) &= \int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1}\,dx = \left[-x^b\frac{(1-x)^{a-b}}{a-b}\right]_0^1 + \frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,dx \\
&= 0 + \frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,dx \text{ (car } b>0 \text{ et } a-b>0) \\
&= \frac{b}{a-b}I(b,a)
\end{aligned}$$

A.I.1.c) Soient a et b des entiers naturels tels que $2 \leqslant b \leqslant a$.

$$\begin{aligned}
I(b,a) &= \frac{b-1}{a-(b-1)} \times \frac{b-2}{a-(b-2)} \times \ldots \times \frac{1}{a-1}I(1,a) = \frac{(b-1)!}{a(a-1)\ldots(a-(b-1))} = \frac{b!(a-b)!}{b\ a!} \\
&= \frac{1}{b\dbinom{a}{b}}.
\end{aligned}$$

Ce résultat reste vrai si $b = 1$ et $a \geqslant 1$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ I(b,a) = \frac{1}{b\dbinom{a}{b}}.}$$

A.I.2.

A.I.2.a) Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $y \in]0,1[$. La formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{a-1}\binom{a-1}{k}y^k(1-x)^{a-1-k}x^k\right)dx = \sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}y^{k-1}\int_0^1 (1-x)^{a-k}x^{k-1}\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}y^{k-1}I(k,a).
\end{aligned}$$

A.I.2.b) Mais on a aussi

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,dx = \int_0^1 (1+x(y-1))^{a-1}\,dx = \left[\frac{(1+x(y-1))^a}{a(y-1)}\right]_0^1 = \frac{1}{a}\times\frac{1-y^a}{1-y}$$
$$= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{a-1} y^k = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}.$$

A.I.2.c) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $\forall y \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}y^{k-1}I(k,a) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}$. Ainsi, les polynômes $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{a}\binom{a-1}{k-1}t^{k-1}I(k,a)$ et $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} t^{k-1}$ coïncident en une infinité de valeurs de la variable. On en déduit que ces polynômes sont égaux et donc ces polynômes ont les mêmes coefficients. Par suite, $\forall k \in [\![1,a]\!]$, $\displaystyle\binom{a-1}{k-1}I(k,a) = \frac{1}{a}$.
Ainsi, si a et b sont deux entiers naturels tels que $1 \leqslant a \leqslant b$,

$$I(b,a) = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}} = \frac{1}{a\dfrac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}} = \frac{1}{b\dfrac{a!}{b!(a-b)!}} = \frac{1}{b\binom{a}{b}}.$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ I(b,a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}} = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}.}$$

A.I.3.

A.I.3.a) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leqslant b \leqslant a$. En développant $(1-x)^{a-b}$ par la formule du binôme de Newton, on obtient

$$I(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,dx = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\int_0^1 x^{b-1+k}\,dx = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}.$$

A.I.3.b) Par suite,

$$I(b,a)\Delta_a = \sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{\Delta_a}{k+b}.$$

Pour chaque $k \in [\![0,a-b]\!]$, $k+b \in \{b,\dots,a\} \subset \{1,\dots,a\}$. Par suite, pour chaque $k \in [\![0,a-b]\!]$, Δ_a est un multiple de $k+b$ et donc $\dfrac{\Delta_a}{k+b}$ est un entier. Mais alors $I(b,a)\Delta_a = \displaystyle\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{\Delta_a}{k+b}$ est un entier relatif et finalement un entier naturel non nul car $I(b,a)\Delta_a = \dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}} > 0$.

A.I.3.c) Ainsi, $\dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}} \in \mathbb{N}^*$ ou encore l'entier $b\binom{b}{a}$ divise l'entier Δ_a.

A.I.4.

A.I.4.a) Soit $k \geqslant 1$. On sait que les multiples communs à 1, 2, ..., k sont les multiples du PPCM de 1, 2, ..., k à savoir Δ_k. Comme Δ_{k+1} est un multiple commun à 1, 2, ..., k, Δ_{k+1} est un multiple de Δ_k.

Soit $n \geqslant 1$. D'après la A.I.3.c), $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} et d'après la remarque précédente, Δ_{2n} divise Δ_{2n+1}. Donc $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}. Ensuite, d'après la question A.I.3.c) appliquée à $a = 2n+1$ et $b = n+1$, on a directement $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n+1}$ divise Δ_{2n+1}.

A.I.4.b) Puisque $1\times(2n+1)+(-2)\times n = 1$, le théorème de Bézout permet d'affirmer que les entiers n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

D'après la question précédente, $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ est un entier, multiple des entiers n et $2n+1$. Mais alors l'entier $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\binom{2n}{n}}$ est multiple du PPCM de n et $2n+1$ à savoir $n(2n+1)$ puisque n et $2n+1$ sont premiers entre eux. Finalement, Δ_{2n+1} est un multiple de $n(2n+1)\binom{2n}{n}$.

A.I.4.c) Soit $n \geqslant 1$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{\dfrac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}}{\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} = \frac{2n-k}{k+1} = \frac{2n+1}{k+1} - 1 \geqslant \frac{2n+1}{n-1+1} - 1 = 1 + \frac{1}{n} > 1,$$

et donc $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. Ainsi, $\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \ldots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}$ et en particulier, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$.
D'autre part, pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n}$ car $2n - k \in [\![0, n-1]\!]$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.}$$

A.I.4.d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

A.I.4.e) D'après la question A.I.4.b), $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} et en particulier, $\Delta_{2n+1} \geqslant n(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant n4^n$.

A.I.4.f) Soit $n \geqslant 9$.
• Si n est impair, il existe $k \geqslant 4$ tel que $n = 2k+1$. D'après la question précédente,

$$\Delta_n = \Delta_{2k+1} \geqslant k4^k = k2^{2k} = k2^{n-1} \geqslant 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

• Si n est pair, il existe $k \geqslant 5$ tel que $n = 2k$. D'après la question précédente,

$$\Delta_n = \Delta_{2k} \geqslant \Delta_{2k-1} \geqslant (k-1)4^{k-1} = (k-1)2^{2k-2} = (k-1)2^{n-2} \geqslant 4 \times 2^{n-2} = 2^n.$$

Donc, $\forall n \geqslant 9$, $\Delta_n \geqslant 2^n$. Ensuite,

$$\Delta_7 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \times 3, 7) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420 \geqslant 128 = 2^7,$$

et

$$\Delta_8 = \text{PPCM}(1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \times 3, 7, 2^3) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840 \geqslant 256 = 2^8,$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 7,\ \Delta_n \geqslant 2^n.}$$

A.I.5.

A.I.5.a) Soient $n \geqslant 1$ et $p \in \mathcal{P}$. On sait que $\nu_p(\Delta_n) = \text{Max}\{\nu_p(k),\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Soit $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\nu_p(\Delta_n) = \nu_p(k_0)$. Alors $p^{\nu_p(k_0)}$ divise k_0 (même si p n'est pas un facteur premier de k_0 car dans ce cas, $p^{\nu_p(k_0)} = 1$).
En particulier, $p^{\nu_p(\Delta_n)} = p^{\nu_p(k_0)} \leqslant k_0 \leqslant n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathcal{P},\ p^{\nu_p(\Delta_n)} \leqslant n.}$$

A.I.5.b) Soient $n \geqslant 2$ et $p \in \mathcal{P}$. Si $p > n$, p n'est diviseur premier d'aucun des entiers $k \in [\![2, n]\!]$ et donc n'est pas un diviseur premier de Δ_n. Par suite, $p^{\nu_p(\Delta_n)} = 1$. Donc

$$\Delta_n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(\Delta_n)} = \prod_{p \leqslant n} p^{\nu_p(\Delta_n)}.$$

Le résultat reste vrai si $n = 1$ car les deux membres sont égaux à 1.

A.I.5.c) Soit $n \geqslant 1$. Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est $\pi(n)$.
Donc $\Delta_n = \displaystyle\prod_{p \leqslant n} p^{\nu_p(\Delta_n)} \leqslant \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{\pi(n)} = n^{\pi(n)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}.}$$

A.I.6.

A.I.6.a) Soit $n \geqslant 7$. D'après les questions A.I.5.b) et A.I.4.f), $n^{\pi(n)} \geqslant \Delta_n \geqslant 2^n$ et donc $\pi(n)\ln n \geqslant n\ln 2$ puis $\pi(n) \geqslant (\ln 2)\dfrac{n}{\ln n}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 7,\ \pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.}$$

A.I.6.b) $\pi(6) = 3$ et $(\ln 2)\dfrac{6}{\ln 6} = 2,3\ldots$. Donc $\pi(6) \geqslant (\ln 2)\dfrac{6}{\ln 6}$.
$\pi(5) = 3$ et $(\ln 2)\dfrac{5}{\ln 5} = 2,1\ldots$. Donc $\pi(5) \geqslant (\ln 2)\dfrac{5}{\ln 5}$.
$\pi(4) = 2$ et $(\ln 2)\dfrac{4}{\ln 4} = 2$. Donc $\pi(4) \geqslant (\ln 2)\dfrac{4}{\ln 4}$.
$\pi(3) = 2$ et $(\ln 2)\dfrac{3}{\ln 3} = 1,8\ldots$. Donc $\pi(3) \geqslant (\ln 2)\dfrac{3}{\ln 3}$.
$\pi(2) = 1$ et $(\ln 2)\dfrac{2}{\ln 2} = 2$. Donc $\pi(2) < (\ln 2)\dfrac{2}{\ln 2}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \pi(n) \geqslant (\ln 2)\frac{n}{\ln n}.}$$

II - Une majoration de la fonction π

A.II.1.

A.II.1.a) Soient a et b deux entiers naturel tels que $0 < \dfrac{b}{2} \leqslant a < b$.
Puisque $\dfrac{b}{2} \leqslant a$, on a encore $b - a \leqslant a$ et donc le produit $b(b-1)\ldots(b-a+1)$ est divisible par chacun des nombres premiers p tels que $a < p \leqslant b$ puis le produit $b(b-1)\ldots(b-a+1)$ est divisible par $\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p$.
Ensuite, le produit $b(b-1)\ldots(b-a+1)$ est divisible par $a!$ car $b(b-1)\ldots(b-a+1) = a! \times \dbinom{b}{a}$.
Enfin, $a!$ n'est divisible par aucun nombre premier strictement supérieur à a et donc $a!$ est premier à un tel nombre premier. Par suite, $a!$ et $\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p$ sont premiers entre eux.

Mais alors $b(b-1)\ldots(b-a+1)$ est divisible par le PPCM de $a!$ et $\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p$ à savoir $a!\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p$ puisque ces deux entiers sont premiers entre eux. Par suite, $\dfrac{\dbinom{b}{a}}{\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p} = \dfrac{b(b-1)\ldots(b-a+1)}{a!\displaystyle\prod_{a<p\leqslant b} p}$ est un entier naturel ou encore

$$\prod_{a<p\leqslant b} p \text{ divise } \binom{b}{a}.$$

A.II.1.b) Soit $m \geqslant 1$. Posons $a = m+1$ et $b = 2m+1$. Alors $b - a = m > 0$ et $a - \dfrac{b}{2} = m + 1 - m - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$. La question précédente permet alors d'affirmer que $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise $\dbinom{2m+1}{m+1}$.

A.II.1.c) Soit $m \geqslant 1$. $\dbinom{2m+1}{m+1} = \dbinom{2m+1}{(2m+1)-(m+1)} = \dbinom{2m+1}{m}$.

A.II.1.d) Soit $m \geqslant 1$.

$$2\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} = (1+1)^{2m+1} = 2^{2m+1},$$

et donc $\displaystyle\binom{2m+1}{m+1} \leqslant 2^{2m} = 4^m$.

A.II.1.e) Soit $m \geqslant 1$.

L'entier $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$ divise l'entier $\displaystyle\binom{2m+1}{m+1}$ et en particulier $\displaystyle\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m+1} \leqslant 4^m$.

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m.}$$

A.II.1.f) • $\displaystyle\prod_{p\leqslant 1} p$ est un produit vide et donc est égal à 1. Par suite, $\displaystyle\prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4 = 4^1$. D'autre part, $\displaystyle\prod_{p\leqslant 2} p = 2 \leqslant 16 = 4^2$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $\displaystyle\prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^k$. Alors, par hypothèse de récurrence et d'après la question précédente

$$\prod_{p\leqslant 2n+1} p = \left(\prod_{p\leqslant n+1} p\right) \times \left(\prod_{n+1<p\leqslant 2n+1} p\right) \leqslant 4^{n+1} \times 4^n = 4^{2n+1}.$$

Enfin, $2n+2$ est un entier pair supérieur ou égal à 4 et en particulier $2n+2$ n'est pas premier. On en déduit que

$$\prod_{p\leqslant 2n+2} p = \prod_{p\leqslant 2n+1} p \leqslant 4^{2n+1} \leqslant 4^{2n+2}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n.}$$

A.II.2.

A.II.2.a) Soit $m \geqslant 1$. $\displaystyle e^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k}{k!} \geqslant \frac{m^m}{m!}$ et donc $\displaystyle m! > \frac{m^m}{e^m} = \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

A.II.2.b) Soit $n \geqslant 2$. Notons $p_1 = 2$, ..., $p_{\pi(n)}$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n et rangés dans l'ordre croissant. On a immédiatement par récurrence : $\forall k \in [\![1, \pi(n)]\!]$, $p_k \geqslant k$ et donc d'après la question B.II.1.f),

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} < \pi(n)! = \prod_{k=1}^{\pi(n)} k \leqslant \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k = \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n,$$

puis par stricte croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\displaystyle\pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n) = \ln\left(\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)}\right) < \ln(4^n) = n\ln 4$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n) \leqslant n\ln 4.}$$

A.II.3.

A.II.3.a) La fonction $f\ :\ x \mapsto x\ln x - x$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$, $f'(x) = \ln x$. Pour $x > 1$, on a $f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Maintenant, classiquement $n_0 \geqslant \ln n_0$ et donc $\displaystyle e\frac{n_0}{\ln n_0} \geqslant 1$.

On en déduit que $\displaystyle f\left(e\frac{n_0}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \leqslant n_0 \ln 4$. Or,

$$f\left(e\frac{n_0}{\ln n_0}\right) = e\frac{n_0}{\ln n_0}\ln\left(e\frac{n_0}{\ln n_0}\right) - e\frac{n_0}{\ln n_0} = e\frac{n_0}{\ln n_0}\ln\left(\frac{n_0}{\ln n_0}\right) = en_0\left(1 - \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}\right),$$

et donc $\displaystyle en_0\left(1 - \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}\right) < n_0 \ln 4$ puis $\displaystyle 1 - \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} < \frac{\ln 4}{e}$ et enfin $\displaystyle\frac{e - \ln 4}{e} < \frac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}$.

A.II.3.b) La fonction $\displaystyle x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$, $\displaystyle f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. La fonction f' est positive sur $[1, e]$ et négative sur $[e, +\infty[$. On en déduit que la fonction f admet un maximum en e égal à $\displaystyle f(e) = \frac{1}{e}$. Ainsi,

$$\forall x \geqslant 1,\ \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{e}.$$

En particulier, (puisque $\ln n_0 \geqslant \ln 3 \geqslant 1$), $\dfrac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} \leqslant \dfrac{1}{e}$ puis $\dfrac{e-\ln 4}{e} < \dfrac{1}{e}$ et finalement $e < 1+\ln 4$. Puisque $e = 2,7\ldots$ et $1+\ln 4 = 2,3\ldots$, on aboutit à une contradiction. Donc $\forall n \geqslant 3$, $\pi(n) \leqslant e\dfrac{n}{\ln n}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \pi(n) \leqslant e\frac{n}{\ln n}.}$$

B - Autour d'un théorème de Mertens

I. Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de $n!$

B.I.1. Soit k un entier naturel $p^k > n \Leftrightarrow k > \log_p n \Leftrightarrow k \geqslant [\log_p n]+1$ (même si $\log_p n$ est un entier). Donc k_0 existe et

$$\boxed{k_0 = [\log_p n]+1.}$$

De plus, puisque $p^0 = 1 \leqslant n$, on a $k_0 \geqslant 1$.

B.I.2.

B.I.2.a) Soit $k \in [\![0, k_0-1]\!]$. Pour $a \in [\![1, n]\!]$,

$$a \in U_{k+1} \Rightarrow p^{k+1} \text{ divise } a \Rightarrow p^k \text{ divise } a \Rightarrow a \in U_k.$$

Donc $\forall k \in [\![0, k_0-1]\!]$, $U_{k+1} \subset U_k$. De plus, puisque $k \leqslant k_0-1$, on a $1 \leqslant p^k \leqslant n$. Mais alors $p^k \in U_k$. D'autre part, p^{k+1} ne divise pas p^k et donc $p^k \notin U_{k+1}$. Finalement $\forall k \in [\![0, k_0-1]\!]$, $U_{k+1} \underset{\neq}{\subset} U_k$.

Soit $k \geqslant k_0$. Alors $p^k \geqslant p^{k_0} > n$ et donc $\forall a \in [\![1, n]\!]$, $p^k > a$. En particulier, p^k ne divise aucun des entiers a tels que $1 \leqslant a \leqslant n$ et donc U_k est vide.

B.I.2.b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $V_k = [\![1, n]\!] \setminus U_k$. On déduit alors de la question précédente que si $k \in [\![0, k_0-1]\!]$, $V_k \underset{\neq}{\subset} V_{k+1}$ et si $k \geqslant k_0$, $V_k = [\![1, n]\!]$.

B.I.2.c) Un facteur premier de $n!$ est un diviseur premier de l'un des entiers a tels que $1 \leqslant a \leqslant n$.
Si $a = 1$, $\nu_p(a)$ n'est pas définie et on prendra $\nu_p(a) = 0$ ce qui est cohérent avec la notation $1 = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(1)}$. Ainsi, l'entier $a = 1$ est dans Ω_0 et dans aucun autre Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$.
Soit $a \in [\![2, n]\!]$. Puisque $\nu_p(a)$ est uniquement défini, a est dans exactement un Ω_k, $k \in \mathbb{N}$. Maintenant, si $k \geqslant k_0$, $p^k > n \geqslant a$ et donc $k \neq \nu_p(a)$. Par suite, a est dans exactement un Ω_k, $k \in [\![0, k_0-1]\!]$. Enfin, chaque Ω_k, $0 \leqslant k \leqslant k_0-1$, est non vide car $\forall k \in [\![0, k_0-1]\!]$, $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$ avec $U_{k+1} \underset{\neq}{\subset} U_k$. On a montré que $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$.

B.I.3.

B.I.3.a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $a \in [\![1, n]\!]$, d'après une propriété admise dans le préambule,

$$a \in \Omega_k \Leftrightarrow \nu_p(a) = k \Leftrightarrow p^k \text{ divise } a \text{ et } p^{k+1} \text{ ne divise pas } a \Leftrightarrow a \in U_k \text{ et } a \in V_{k+1} \Leftrightarrow a \in U_k \cap V_{k+1}.$$

Donc $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.

B.I.3.b) Soit $k \in \mathbb{N}$. U_k est l'ensemble des multiples de p^k qui sont éléments de $[\![1, n]\!]$ et donc

$$\#U_k = \#\{q \in \mathbb{N}/\ 1 \leqslant qp^k \leqslant n\}.$$

Maintenant, pour $q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant qp^k \leqslant n \Leftrightarrow \dfrac{1}{p^k} \leqslant q \leqslant \dfrac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leqslant q \leqslant \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. Donc $\#U_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ puis $\#V_k = n - \left[\dfrac{n}{p^k}\right]$.

Enfin, puisque $U_{k+1} \subset U_k$, $\#\Omega_k = \#U_k - \#U_{k+1} = \left[\dfrac{n}{p^k}\right] - \left[\dfrac{n}{p^{k+1}}\right]$.

B.I.4. D'après une propriété admise dans le préambule,

$$\begin{aligned}\nu_p(n!) &= \nu_p\left(\prod_{a=1}^{n} a\right) = \sum_{a=1}^{n} \nu_p(a) = \sum_{k=0}^{k_0-1}\left(\sum_{a \in \Omega_k} \nu_p(a)\right) = \sum_{k=0}^{k_0-1}\left(k\sum_{a \in \Omega_k} 1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} k\#\Omega_k = \sum_{k \geqslant 0} k\#\Omega_k.\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] = 0$ pour $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{k\geqslant 0} k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k\left[\frac{n}{p^k}\right] - \sum_{k\geqslant 0} k\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] \text{ (les sommes sont finies)} \\
&= \sum_{k\geqslant 1} k\left[\frac{n}{p^k}\right] - \sum_{k\geqslant 1} (k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall p \in \mathcal{P},\ v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].}$$

II. Un théorème de Mertens

B.II.1. Soient $n \geqslant 2$ et $p \in \mathcal{P}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] \leqslant \dfrac{n}{p^k}$ et donc, puisque $0 < \dfrac{1}{p} < 1$,

$$v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right] \leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{n}{p^k} = \frac{n}{p}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p}} = \frac{n}{p}\times\frac{p}{p-1} = \frac{n}{p}\times\frac{p-1+1}{p-1} = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

D'autre part, $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right] \geqslant \left[\frac{n}{p}\right] > \frac{n}{p} - 1$.

B.II.2. Soit $n \geqslant 2$. On a vu que si $p > n$, p n'est pas un facteur premier de $n!$ et donc $v_p(n!) = 0$. Donc $n! = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n!)} = \prod_{p\leqslant n} p^{v_p(n!)}$ puis $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{p\leqslant n} v_p(n!)\ln p$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} v_p(n!)\ln p \leqslant \sum_{p\leqslant n}\left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\right)\ln p = n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)}$ et aussi $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} v_p(n!)\ln p > \sum_{p\leqslant n}\left(\frac{n}{p} - 1\right)\ln p = n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - n\sum_{p\leqslant n}\ln p$ (il y a au moins une inégalité stricte puisque la somme contient le terme correspondant à $p = 2$ avec $\ln 2 > 0$).

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - \sum_{p\leqslant n}\ln p < \ln(n!) \leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)}.}$$

B.II.3.

B.II.3.a) D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{r}{2^r} \underset{r\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ et donc la série de terme général $\dfrac{r}{2^r}$, $r \geqslant 1$, converge. Posons alors $S = \displaystyle\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^r}$.

$$2S = \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^{r-1}} = 1 + \sum_{r=2}^{+\infty}\frac{r}{2^{r-1}} = 1 + \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r+1}{2^r} = 1 + S + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2 + S,$$

et donc $S = 2$.

$$\boxed{\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^r} = 2.}$$

B.II.3.b) Soit $r \geqslant 1$.

$$\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r}\frac{1}{m(m-1)} = \sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^r} \text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit que $U_r \leqslant \ln(2^r) \displaystyle\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{r\ln 2}{2^r}$.

B.II.3.c) Pour tout entier $r \geqslant 1$, $0 \leqslant U_r \leqslant \dfrac{r\ln 2}{2^r}$. Mais d'après la question B.II.3.a), la série de terme général $\dfrac{r\ln 2}{2^r}$, $r \geqslant 1$, converge. Il en est de même de la série de terme général U_r et de plus, $\displaystyle\sum_{r=1}^{+\infty} U_r \leqslant \ln 2 \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2\ln 2 = \ln 4$.

$$\boxed{\sum_{r=1}^{+\infty} U_r \leqslant \ln 4.}$$

B.II.3.d) D'après un théorème de croissances comparées, $\dfrac{\ln m}{m(m-1)} \underset{m\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{m^{3/2}}\right)$. Donc la série de terme général $\dfrac{\ln m}{m(m-1)}$, $m \geqslant 2$, converge. Puisque la suite $\left(\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{\ln m}{m(m-1)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge, la suite extraite $\left(\displaystyle\sum_{m=2}^{2^n} \frac{\ln m}{m(m-1)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a même limite. Donc

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=2}^{2^n} \frac{\ln m}{m(m-1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \sum_{r=1}^{+\infty} U_r$$
$$\leqslant \ln 4$$

B.II.3.e) Soit $u \in [0,+\infty[$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 appliquée à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur l'intervalle $[0,u]$ fournit

$$\ln(1+u) = \ln 1 + \frac{u}{1+0} + \int_0^u \frac{(u-t)}{1!} \times -\frac{1}{(1+t)^2}\,dt = u - \int_0^u \frac{u-t}{(1+t)^2}\,dt \leqslant u.$$

La même formule à l'ordre 3 fournit

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2!} \times \frac{2}{(1+t)^3}\,dt = u - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{(1+t)^3}\,dt \geqslant u - \frac{u^2}{2}.$$

En résumé, $\forall u \geqslant 0$, $u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$. En particulier pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ ou encore $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$. De plus, pour $n \geqslant 1$, $n^2 \geqslant n$ et donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n}$.

Remarque. Seuls les $u \in]0,1[$ sont utilisés. Pour un tel u, l'égalité $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k}$ et les inégalités classiques sur les sommes de séries alternées fournissent immédiatement $u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$.

B.II.3.f) • Pour $n = 2$, $\dfrac{\ln(2!) - (2\ln 2 - 2 + 1)}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2} - 1 = 0,4\ldots$ Ainsi, le réel $\theta_2 = \dfrac{\ln(2!) - (2\ln 2 - 2 + 1)}{\ln 2}$ est élément de $[0,1]$ et vérifie $\ln(2!) = 2\ln 2 - 2 + 1 + \theta_2 \ln 2$.

• Soit $n \geqslant 2$. Supposons qu'il existe $\theta_n \in [0,1]$ tel que $\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$.
Soit $\theta_{n+1} = \dfrac{\ln((n+1)!) - ((n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1)}{\ln(n+1)}$. On a

$$\begin{aligned}
\ln((n+1)!) - ((n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1) &= \ln(n!) - n\ln(n+1) + n \\
&= n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n - n\ln(n+1) + n \\
&= 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \theta_n \ln(n+1) - \theta_n(\ln(n+1) - \ln n) \\
&= 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \theta_n \ln(n+1) - \theta_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

et donc

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \theta_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)} \geqslant \theta_n + \frac{0 - \theta_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)} = \theta_n\left(1 - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}\right)$$

$$\geqslant \theta_n\left(1 - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\ln(3)}\right) = \frac{\ln 2}{\ln 3}\theta_n \geqslant 0,$$

et aussi

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \theta_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1)}\\ &\leqslant \theta_n + \frac{\frac{1}{2n} - \frac{\theta_n}{2n}}{\ln(n+1)} = \theta_n\left(1 - \frac{1}{2n\ln(n+1)}\right) + \frac{1}{2n\ln(n+1)}\\ &\leqslant 1 - \frac{1}{2n\ln(n+1)} + \frac{1}{2n\ln(n+1)} \text{ (car } \frac{1}{2n\ln(n+1)} \leqslant \frac{1}{2\ln 3} \leqslant 1 \text{ et donc } 1 - \frac{1}{2n\ln(n+1)} \geqslant 0)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

B.II.4. D'après la question B.II.3.d), $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p(p-1)} < \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leqslant \ln 4$ et d'après la question B.II.3.f), $\ln(n!) \geqslant n\ln n - n + 1$. La question B.II.2) permet alors d'écrire

$$n\ln n - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p(p-1)} < n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} + n\ln 4,$$

et donc $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} > \ln n - 1 - \ln 4 + \frac{1}{n} > \ln n - (1 + \ln 4)$.

B.II.5. De même,

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} &< \frac{1}{n}\left(\ln(n!) + \sum_{p\leqslant n}\ln p\right) \text{ (d'après II.B.2))}\\ &= \frac{1}{n}\left(\ln(n!) + \ln\left(\prod_{p\leqslant n} p\right)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n}(n\ln n - n + 1 + \ln n + \ln(4^n)) \text{ (d'après A.II.1.f) et B.II.3.f))}\\ &= \ln n + \ln 4 - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}\\ &\leqslant \ln n + \ln 4 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \text{ (d'après A.II.3.b))}\\ &< \ln n + \ln 4.\end{aligned}$$

En résumé, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle -1 - \ln 4 < \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - \ln n < \ln 4$. Ainsi, la suite, $\displaystyle\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} - \ln n\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée ou encore

$$\boxed{\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln p}{p} = \ln n + O(1).}$$

III. Le comportement asymptotique de $\left(\sum_{p\leqslant} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1.

B.III.1.a) La fonction $t \mapsto t\ln^2 t$ est strictement positive et croissante sur $]1,+\infty[$ (produit de deux fonctions strictement positives et croissantes sur $]1,+\infty[$). Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Pour $k \geqslant 3$, on a alors $\frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$ puis, pour $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt = \int_{2}^{n} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt \leqslant \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

puis pour $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$. Ainsi, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs de terme général $\frac{1}{n\ln^2 n}$, $n \geqslant 2$, est majorée et donc cette série converge.

De même, pour $k \geqslant 3$, $\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln t}\,dt$ puis pour $n \geqslant 4$,

$$\int_{3}^{n} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \int_{2}^{n-1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_{2}^{n} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

On en déduit que pour $n \geqslant 4$, $\ln\ln n - \ln\ln 3 + \frac{1}{\ln 2} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \ln\ln n - \ln\ln 2 + \frac{1}{\ln 2}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln\ln n = +\infty$, la minoration précédente montre que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = +\infty$ et donc la série de terme général $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge.

L'encadrement montre quant à lui que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n\right)$ est bornée et donc que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} = \ln\ln n + O(1).$$

B.III.1.b) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n\ln n} - \ln\ln(n+1) + \ln\ln n = \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(\frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\\
&= \frac{1}{n\ln n} - \ln\left(1 + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}\right) = \frac{1}{n\ln n} - \left(\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2n^2\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right).
\end{aligned}$$

B.III.1.c) On sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \geqslant 3$, sont de même nature. Puisque $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \geqslant 3$, converge et il en est de même de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$. Donc il existe un réel ℓ tel que $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} - \ln\ln n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ ou encore tel que $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln\ln n + \ell + o(1)$.

B.III.2.

B.III.2.a) Soit $n \geqslant 3$. On note δ la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$. En remarquant que $\psi(n) = \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln p}{p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(k)\ln k}{k}$, une transformation d'Abel fournit

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(k)\ln k}{k}\times\frac{1}{\ln k}=\frac{\psi(n)}{\ln n}+\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\left(\frac{1}{\ln k}-\frac{1}{\ln(k+1)}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\left(\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\ln k\ln(k+1)}\right)+\frac{\psi(n)}{\ln n}=\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}+\frac{\psi(n)}{\ln n}$$
$$=\sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}+\frac{\psi(n)}{\ln n}\ (\text{car }\psi(1)=0).$$

B.III.2.b) D'après le théorème de Mertens (B.II.5)

$$\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}=(\ln k+O(1))\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1)}+O\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}\right)$$
$$=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k+1)}+O\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)\ \left(\text{car }\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}\sim\frac{1}{k\ln^2 k}\right)$$
$$=\frac{1}{\ln k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k}}+O\left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)$$
$$=\frac{1}{\ln k}\left(\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k\ln k}\right)\right)=\frac{1}{\ln k}\left(\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k\ln k}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\ln k}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{k\ln k}+O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right).$$

B.III.3. On déduit des questions précédentes que

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n-1}\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln k\ \ln(k+1)}+\frac{\psi(n)}{\ln n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\ln k}+\sum_{k=1}^{n-1}O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)+\frac{\ln n+O(1)}{\ln n}=\ln\ln n+\ell+o(1)+\sum_{k=1}^{+\infty}O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)+o(1)+1+o(1)$$
$$=\ln\ln n+\lambda+o(1)\text{ où }\lambda=\ell+\sum_{k=1}^{+\infty}O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right)+1.$$

$$\boxed{\text{Il existe }\lambda\in\mathbb{R}\text{ tel que }\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\underset{n\to+\infty}{=}\ln\ln n+\lambda+o(1).}$$

B.III.4. On effectue de nouveau une transformation d'Abel en notant que pour $n\geqslant 1$, $\pi(n)=\sum_{k=1}^{n}\delta(k)$ (où δ désigne toujours la fonction caractéristique de $\mathcal{P}$). Pour $n\geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(k)}{k}=\frac{\pi(n)}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\pi(k)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}+\frac{\pi(n)}{n}.$$

Si maintenant il existe $c>0$ tel que $\pi(n)\sim c\dfrac{n}{\ln n}$, alors $\dfrac{\pi(k)}{k(k+1)}\sim\dfrac{c}{k\ln k}$. Comme $\dfrac{1}{k\ln k}>0$ et que la série de terme général $\dfrac{1}{k\ln k}$ diverge, un théorème de sommation des relations de comparaison permet d'affirmer que $\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\pi(k)}{k(k+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{c}{k\ln k}\sim c\ln\ln n$ (d'après la question B.III.1.c)).

Ainsi, s'il existe $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\dfrac{n}{\ln n}$, alors $\displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\sim} c \ln\ln n$. Comme d'autre part, $\displaystyle\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\ln n$, on en déduit que $c = 1$.

IV. Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

B.IV.1. D'après la question B.III.3,

$$\sum_{\sqrt{n} < p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} - \sum_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{=} \ln\ln n + \lambda + o(1) - \ln\ln\sqrt{n} - \lambda + o(1)$$
$$= \ln\ln n - \ln\left(\frac{1}{2}\ln n\right) + o(1) = \ln 2 + o(1).$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{\sqrt{n} < p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln 2.}$$

B.IV.2.

B.IV.2.a) Si $p > m$, un éventuel facteur premier de n distinct de p est un facteur premier de m et est donc strictement inférieur à p. Donc $p = P^+(n)$. Ensuite, $\sqrt{n} = \sqrt{mp} < \sqrt{p^2} = p$ et donc $n \in A$. Enfin, si $p \leqslant \dfrac{x}{m}$, alors $n = mp \leqslant x$ et donc $n \in A(x)$.

Réciproquement, supposons que $p = P^+(n)$ et $n \in A(x)$). Alors, $mp \leqslant x$ puis $p \leqslant \dfrac{x}{m}$. D'autre part, puisque $n \in A$ et que $p = P^+(n)$, $p > \sqrt{n} = \sqrt{mp}$ puis $p^2 > mp$ et finalement $p > m$.

On a montré que $(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)) \Leftrightarrow m < p \leqslant \dfrac{x}{m}$.

B.IV.2.b) Si on pose $n = mp = m'p'$, la question précédente montre que $p = P^+(n) = p'$ puis $m = \dfrac{n}{p} = m'$.

B.IV.2.c) D'après la question a), les éléments de $A(x)$ sont les entiers de la forme mp où p est un nombre premier et m est un entier tel que $m < p \leqslant \dfrac{x}{m}$ et d'après b), pour chaque entier n de $A(x)$, il existe au plus un couple (m, p) tel que p est premier, $n = mp$ et $m < p \leqslant \dfrac{m}{p}$. D'où le résultat.

B.IV.2.d) Soit $x \geqslant 2$. D'après ce qui précède, $a(x)$ est le nombre de couples (m, p) où p est un nombre premier et m est un entier naturel non nul tel que $m < p \leqslant \dfrac{x}{m}$. Maintenant, si p est un nombre premier donné, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$m < p \leqslant \frac{x}{m} \Leftrightarrow m < p \text{ et } m \leqslant \frac{x}{p} \Leftrightarrow m \leqslant p - 1 \text{ et } m \leqslant \left[\frac{x}{p}\right] \Leftrightarrow m \leqslant \min\left(p - 1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).$$

Ainsi, pour chaque $p \in \mathcal{P}$, il y a $\min\left(p - 1, \left[\dfrac{x}{p}\right]\right)$ entiers m tels que l'entier $n = mp$ soit dans $A(x)$. Donc

$$a(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \min\left(p - 1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p - 1, \left[\frac{x}{p}\right]\right)$$

car si $p > x$, $\left[\dfrac{x}{p}\right] = 0$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 2,\ a(x) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p - 1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).}$$

B.IV.3.

B.IV.3.a) Soit $x \geqslant 1$. Puisque $p - 1$ est un entier,

$$p - 1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right] \Leftrightarrow p - 1 \leqslant \frac{x}{p} \Leftrightarrow p^2 - p - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} + x$$
$$\Leftrightarrow p - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{1 + 4x}}{2} \Leftrightarrow p \leqslant \varphi(x).$$

B.IV.3.b) Soit $x \geqslant 1$. $\varphi(x) > \dfrac{\sqrt{4x}}{2} = \sqrt{x}$ et $\varphi(x) < \dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{x}+4x}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{(1+2\sqrt{x})^2}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x}+1$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x}+1.}$$

B.IV.3.c) Soit $x \geqslant 1$. Puisque $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x}+1$, il existe au plus un nombre premier p tel que $\sqrt{x} < p \leqslant \varphi(x)$. S'il n'existe pas de nombre premier dans l'intervalle $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$, l'inégalité $p \leqslant \varphi(x)$ est équivalente à l'inégalité $p \leqslant \sqrt{x}$. D'après la question B.IV.3.a), si $p \leqslant \sqrt{x}$, $\min\left(p-1, \left[\dfrac{x}{p}\right]\right) = p-1$ et si $\sqrt{x} < p \leqslant x$, $\min\left(p-1, \left[\dfrac{x}{p}\right]\right) = \left[\dfrac{x}{p}\right]$.

Dans ce cas, $a(x) = \displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right]$.

S'il existe un nombre premier p_0 dans $]\sqrt{x}, \varphi(x)]$, alors $a(x) = \displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + (p_0-1) + \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right]$. Il s'agit alors de vérifier que $\left[\dfrac{x}{p_0}\right] = p_0 - 1$.

- $\dfrac{x}{p_0} < \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} < p_0$ et donc $\left[\dfrac{x}{p_0}\right] \leqslant p_0 - 1$.
- $X_1 = \varphi(x)$ est solution de l'équation $X^2 - X - x = 0$. L'autre solution X_2 vérifie $X_2\varphi(x) = -x$ et $X_2 + \varphi(x) = 1$. Par suite $\dfrac{x}{\varphi(x)} = -X_2 = \varphi(x) - 1$. Mais alors $\dfrac{x}{p_0} \geqslant \dfrac{x}{\varphi(x)} = \varphi(x) - 1 \geqslant p_0 - 1$ et donc $\left[\dfrac{x}{p_0}\right] \geqslant p_0 - 1$.

Finalement, on a de nouveau $a(x) = \displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \left[\dfrac{x}{p_0}\right] + \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right] = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right]$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ a(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right].}$$

B.IV.3.d) Soit $x \geqslant 9$ (de sorte que $[\sqrt{x}] \geqslant 3$. D'après la question A.II.3,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) &= \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} p - \pi\left(\left[\sqrt{x}\right]\right) \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \left[\sqrt{x}\right] - \pi\left(\left[\sqrt{x}\right]\right) = \pi\left(\left[\sqrt{x}\right]\right)\left(\left[\sqrt{x}\right] - 1\right) \\ &\leqslant e\frac{\left[\sqrt{x}\right]}{\ln\left[\sqrt{x}\right]}\sqrt{x} \leqslant e\frac{x}{\ln\left[\sqrt{x}\right]}.\end{aligned}$$

Par suite, pour $x \geqslant 9$, $0 \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \leqslant \dfrac{e}{\ln\left[\sqrt{x}\right]}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) = 0$ et donc que

$$\boxed{\frac{1}{x}\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \underset{x\to+\infty}{=} o(x).}$$

B.IV.3.e) Soit $x \geqslant 9$. On a $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left(\dfrac{x}{p} - 1\right) \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \dfrac{x}{p}$ avec $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} 1 = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \leqslant \pi(x)$. Donc

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p} - \frac{\pi}{x} \leqslant \frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p}.$$

Maintenant, d'après la question B.IV.1, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \dfrac{1}{p} = \ln 2$ et d'après la question A.II.3, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\pi(x)}{x} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right] = \ln 2$ ou encore que $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\dfrac{x}{p}\right] = x\ln 2 + o(x)$.

B.IV.3.f) D'après les questions précédentes, $a(x) = o(x) + x\ln 2 + o(x)$ et donc $\dfrac{a(x)}{x} = \ln 2 + o(1)$. En particulier,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a(n)}{n} = \ln 2.}$$

