SESSION 2007

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 1

Première partie : Convergence de la suite

1. *Première méthode*

a) Soit $k \geqslant 2$. On a $0 < k-1 \leqslant k$ et donc $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k \times k} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

b) Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2. \end{aligned}$$

Cette inégalité reste vraie quand $n = 1$ car $s_1 = 1$. Donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ s_n \leqslant 2.}$$

c) Soit $n \geqslant 1$. $s_{n+1} - s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$. Donc la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Ainsi, la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et majorée par 2. On en déduit que cette suite converge et que sa limite S est inférieure ou égale à 2.

2. *Deuxième méthode*

a) Soit $n \geqslant 1$. $t_{n+1} - t_n = s_{n+1} - s_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0$.
Donc la suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

Ainsi, la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante et la suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante. Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} (t_n - s_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc les suites $(s_n)_{n \geqslant 1}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent vers une limite commune S et en particulier, la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers S.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $s_n \leqslant S \leqslant t_n$. Donc, pour tout entier naturel non nul, $0 \leqslant S - s_n \leqslant t_n - s_n = \dfrac{1}{n}$.
Soit $n \geqslant 1$.

$$0 \leqslant S - s_n \leqslant \frac{10^{-1}}{2} \Leftarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{10^{-1}}{2} \Leftarrow n = 20.$$

Donc, $0 \leqslant S - s_{20} \leqslant \dfrac{10^{-1}}{2}$ ou encore $s_{20} \leqslant S \leqslant s_{20} + \dfrac{10^{-2}}{2}$. Maintenant, $s_{20} = 1,596\ldots$ et donc $s_{20} + \dfrac{10^{-1}}{2} = 1,646\ldots$.
Par suite, $1,59 \leqslant S \leqslant 1,69$.

3. *Troisième méthode*

Exercice. Pour $n \geqslant 1$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

b) En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $s_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

c) Montre que la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée.

2) Montrer que la suite $(s_n)_{n \geqslant 2}$ converge.

Deuxième partie : Utilisation de polynômes

1. En développant l'expression $a_n(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ et en identifiant à $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, on obtient $\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.

2. a) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sin((2p+1)\varphi) &= \mathrm{Im}\left(e^{(2p+1)i\varphi}\right) = \mathrm{Im}\left((\cos\varphi + i\sin\varphi)^{(2p+1)}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}\cos^{2p+1-k}\varphi(i\sin\varphi)^k\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k}\cos^{2p+1-2k}\varphi(-1)^k\sin^{2k}\varphi + i\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p+1-(2k+1)}\varphi(-1)^k\sin^{2k+1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}\varphi\sin^{2k+1}
\end{aligned}$$

b) Si de plus $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}\varphi\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}\varphi\sin^{2k-2p} = \sin^{2p+1}\varphi\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}(\mathrm{cotan}^2\varphi)^{p-k}.$$

3. a) Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a $0 < \dfrac{k\pi}{2p+1} < \pi$ et en particulier $\dfrac{k\pi}{2p+1}$. On peut alors écrire

$$P(\gamma_k) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{2p+1}{2j+1}\left(\mathrm{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}\right)^{p-j} = \frac{\sin\left((2p+1)\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0$$

b) Soit $k \in [\![1,p]\!]$. $0 < \dfrac{\pi}{2p+1} \leqslant \dfrac{k\pi}{2p+1} \leqslant \dfrac{p\pi}{2p+1} < \dfrac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Maintenant, la fonction cotangente est strictement décroissante et strictement positive sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $0 < \mathrm{cotan}\dfrac{p\pi}{2p+1} < \mathrm{cotan}\dfrac{(p-1)\pi}{2p+1} < \dots < \mathrm{cotan}\dfrac{\pi}{2p+1}$ puis, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, $\gamma_p < \gamma_{p-1} < \dots < \gamma_1$.

En particulier, les p nombres γ_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, sont deux à deux distincts et tous racines du polynôme P de degré p. Ce sont donc toutes les racines de P.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après le rappel de la question 1),

$$\sum_{k=1}^{p}\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \sum_{k=1}^{p}\gamma_k = -\frac{-\dbinom{2p+1}{3}}{\dbinom{2p+1}{1}} = \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)/6}{(2p+1)} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

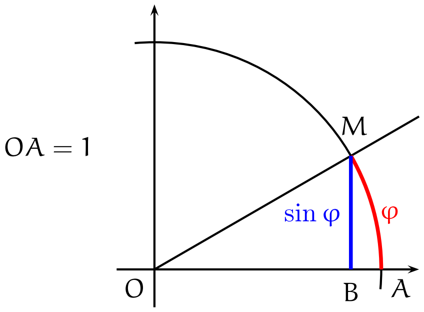
Ensuite,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\left(1+\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{p(2p-1+3)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p}\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}\ \text{et}\ \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.}$$

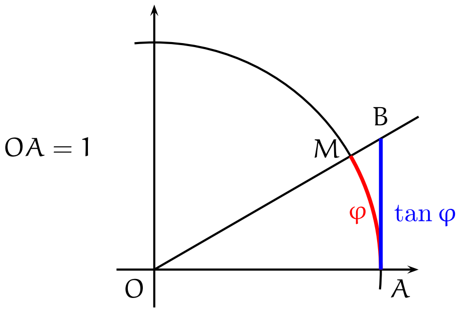
4. a) Remarque. Il n'est pas question de démontrer les inégalités de l'énoncé en dérivant la fonction $\varphi \mapsto \varphi - \sin\varphi$ ou en utilisant une formule de Taylor car la formule $\sin' = \cos$ est établie à partir de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, limite elle même établie à partir de l'encadrement $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Soit $\varphi \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Le dessin suivant suffira pour l'inégalité $\sin\varphi < \varphi$:



$\sin\varphi = MB$ est la distance de M à la droite (OA). Cette distance est strictement inférieure à la longueur de toute courbe distincte du segment $[MB]$ joignant le point M à un point de la droite (OA). Cette distance est en particulier strictement inférieure à la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ c'est-à-dire φ.

Pour l'inégalité $\varphi < \tan\varphi$, on peut considérer des aires :



L'aire du secteur angulaire OMB est $\dfrac{\varphi}{2}$.

L'aire du triangle OAB est $\dfrac{\tan\varphi}{2}$.

Donc $\dfrac{\varphi}{2} < \dfrac{\tan\varphi}{2}$ ou encore $\varphi < \tan\varphi$.

$$\boxed{\forall\varphi\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ 0<\sin\varphi<\varphi<\tan\varphi.}$$

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in[\![1,p]\!]$, on a $0<\dfrac{k\pi}{2p+1}<\dfrac{\pi}{2}$ et donc $0<\sin\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)<\dfrac{k\pi}{2p+1}<\tan\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$ puis, par stricte décroissance de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$, $\cotan^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)<\dfrac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)^2}<\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{p(2p-1)}{3}=\sum_{k=1}^{p}\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)^2}=\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}=\frac{2p(p+1)}{3}.$$

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \frac{p(2p-1)}{3}<\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\frac{2p(p+1)}{3}.}$$

c) On en déduit encore que pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2}<\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$. Maintenant, quand p tend vers $+\infty$, $\dfrac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\sim\dfrac{2p^2\pi^2}{12p^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\sim\dfrac{2p^2\pi^2}{12p^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. Par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient $\dfrac{\pi^2}{6}\leqslant S\leqslant\dfrac{\pi^2}{6}$ et donc

$$\boxed{S=\frac{\pi^2}{6}.}$$

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{1}{4}s_n$ et donc la suite (u_n) converge vers $U=\dfrac{S}{4}=\dfrac{\pi^2}{24}$.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}=s_{2n+1}-u_n$ et donc la suite (v_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{8}=\dfrac{3S}{4}$.

Enfin, la suite (w_n) converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et

$$W=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=-U+V=\frac{S}{2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

$$\boxed{U=\frac{\pi^2}{24},\ V=\frac{\pi^2}{8}\text{ et }W=\frac{\pi^2}{12}.}$$

Troisième partie : Utilisation des intégrales de Wallis

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\ dt = 1$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\ dt = \frac{\pi^3}{24}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos^{2n+1} t$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \times \cos^{2n+1} t\ dt = \left[\sin t \cos^{2n+1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t(-(2n+1)\sin t \cos^{2n} t)\ dt \\
&= (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2n} t\ dt\ (\cos^{2n+1}(\pi/2) = 0 \text{ car } 2n+1 > 0) \\
&= (2n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^{2n} t\ dt = (2n+1)(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n$ et donc que $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n.}$$

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 1}{(2n)(2n-2)\times\ldots\times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times\ldots\times 1}{((2n)(2n-2)\times\ldots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.}$$

3. a) Soit $n \geqslant 1$. Deux intégrations par parties successives fournissent

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[t \cos^{2n} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t\left(-(2n)\sin t \cos^{2n-1} t\right)\ dt = n\int_0^{\pi/2} 2t \sin t \cos^{2n-1} t\ dt \\
&= n\left(\left[t^2 \sin t \cos^{2n-1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t^2(\cos t \cos^{2n-1} t - \sin t(2n-1)\sin t \cos^{2n-2} t)\ dt\right) \\
&= n\int_0^{\pi/2} t^2(-\cos^{2n} t + (2n-1)\sin^2 t \cos^{2n-2} t)\ dt = n\int_0^{\pi/2} t^2(-\cos^{2n} t + (2n-1)(1-\cos^2 t)\cos^{2n-2} t)\ dt \\
&= n\left((2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n-2} t\ dt - 2n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\ dt\right) = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n.}$$

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n &\Rightarrow \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{4n^2} = \frac{n(2n-1)}{4n^2} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n \\
&\Rightarrow \frac{\pi}{4n^2} = \frac{2n-1}{4n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2} K_{n-1} - K_n \\
&\Rightarrow K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.}$$

c) Soit $n \geqslant 1$. $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k^2} = \sum_{k=1}^{n}(K_{k-1} - K_k) = K_0 - K_n = J_0 - K_n$ (somme télescopique).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n.}$$

4. a) La fonction sin est deux fois dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin'' = -\sin$. Par suite, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\sin''$ est négative puis la fonction sin est concave. En particulier, la graphe de la fonction sin sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est au-dessus de la corde joignant les points $(0, \sin 0) = (0, 0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$. On en déduit que pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$ ou encore, pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin x$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà $I_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégration puis

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\ dt \leqslant \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}\sin t\right)^2\cos^{2n} t\ dt \\
&= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos^2 t)\cos^{2n} t\ dt = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right)I_n \\
&= \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}.
\end{aligned}$$

On en déduit encore $0 \leqslant \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}K_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(n+1)} \times \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ puis $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{\pi^3}{16(n+1)}$ après simplification par le réel strictement positif $\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.}$$

c) En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$. Mais alors d'après les questions 1. et 3.c), $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{4}{\pi}J_0 = \frac{\pi^2}{6}$.

QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

1. Soient $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}D_n(x) &= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)\right) \\
&= \sin\frac{x}{2} + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2} \text{ (somme télescopique)} \\
&= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)
\end{aligned}$$

Maintenant, $\dfrac{x}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$. On en déduit que $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\ D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.}$$

2. a) Soit $k \geqslant 1$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^{\pi} x\cos(kx)\ dx = \left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\ dx = \frac{1}{k}\left[\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\ dx + \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\ dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}.
\end{aligned}$$

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi]$.
Ensuite, $\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x/2} = 2$ et donc la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement est la fonction $f\ :\ x \mapsto \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \text{ si } x \in]0,\pi] \end{array}\right.$.

Pour $x \in]0,\pi]$, $f'(x) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$. Quand x tend vers 0,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{2} + o(x^2) - \dfrac{x}{2}(1 + o(x))}{\dfrac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{o(x^2)}{\dfrac{x^2}{4} + o(x^2)} = o(1),$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

En résumé,
- f est continue sur $[0,\pi]$,
- f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ (et en particulier est dérivable en 0 avec $f'(0) =$).
4. Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Pour $\lambda > 0$, une intégration par parties fournit

$$\int_0^{\pi}\phi(x)\sin(\lambda x)\ dx = \left[-\phi(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi}\phi'(x)\cos(\lambda x)\ dx = \frac{1}{\lambda}\left(\phi(0) - \cos(\lambda\pi)\phi(\pi) + \int_0^{\pi}\phi'(x)\cos(\lambda x)\ dx\right).$$

On en déduit que $\left|\displaystyle\int_0^{\pi}\phi(x)\sin(\lambda x)\ dx\right| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\left(|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi}|\phi'(x)|\ dx\right)$. Maintenant, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda}\left(|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi}|\phi'(x)|\ d\right.$ 0 et donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}\phi(x)\sin(\lambda x)\ dx = 0$.

5. a) D'après la question 1., pour tout entier naturel non nul n, on a $L_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\right)\ dx$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ d'après la question 3., la question précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

b) Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to+\infty} L_n &= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - S - W \\
&= \frac{\pi^2}{4} - S - \frac{S}{2} \text{ (d'après la question II.5.)} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{3S}{2},
\end{aligned}$$

et on retrouve $S = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Cinquième partie : Une somme double

1. a) Soit $N \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Donc pour $n \in [\![1,N]\!]$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t}\,dt$ et pour $n \in [\![2,N]\!]$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{1}{t}\,dt$.

En sommant ces inégalités, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{N+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(N+1)$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{N} \frac{1}{t}\,dt = \ln(N)$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(N)$.

Ainsi, pour tout $N \geqslant 2$, $\ln(N+1) \leqslant H_N \leqslant 1 + \ln(N)$ ce qui reste clairement vrai pour $N = 1$.

b) En particulier, pour tout entier naturel non nul N, $0 \leqslant \dfrac{H_N}{N} \leqslant \dfrac{1}{N} + \dfrac{\ln N}{N}$. Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} + \frac{\ln N}{N} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{H_N}{N} = 0$.

c) Soit $M \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m(m+1)} &= \sum_{m=1}^{M-1} \left(\frac{H_m}{m} - \frac{H_m}{m+1}\right) = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m} - \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{m} - \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m}\left(H_m - \frac{1}{m}\right) = \frac{H_1}{1} + \sum_{m=2}^{M} \frac{H_m}{m} - \frac{H_M}{M} - \sum_{m=2}^{M} \frac{H_m}{m} + \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m^2} \\
&= \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}.
\end{aligned}$$

d) Puisque $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{H_M}{M} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = S$.

$$\boxed{S = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)}.}$$

2. a) Soient $N \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
Z_{N,m} &= \frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{(n+m-1)-n}{n(n+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{m-1} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant,

- si $m \geqslant N+2$, on écrit $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{m-1} \frac{1}{n}\right) - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$,
- si $m = N+1$, on a directement $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$,
- si $m \leqslant N$, on écrit $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=m}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \left(\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}\right) = H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$.

Dans tous les cas, $Z_{N,m} = \dfrac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}\right)$.

b) Soit $m \geqslant 2$. Pour $N \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{m-1} \displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m-1}\left(\underbrace{\frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{N+1}}_{m-1}\right) = \frac{1}{N+1}$ et comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, on a encore $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{m-1} \sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\forall m \geqslant 2,\ \lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}.}$$

3. a) Soient $N \geqslant 1$ et $M \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right) &= \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}\right)\\ &= \frac{1}{1}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1-1)}\right) + \sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}.\end{aligned}$$

b) Soit $M \geqslant 2$. Quand N tend vers $+\infty$, la question précédente et la question 2.b) fournissent

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}.$$

c) Pour $M \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)} = \sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}$. D'après la question 1.c), $\displaystyle\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}$ tend vers $\dfrac{\pi^2}{3}$ quand M tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{M\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{3}.}$$

Sixième partie : La fonction Dilogarithme

1. La fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$. f est définie et continue sur $[-1,1[\setminus\{0\}$ et est prolongeable par continuité en 0 car $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{-t}{t} = 1$. On pose alors $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ -\dfrac{\ln(1-t)}{t} \text{ si } t \in [-1,1[\setminus\{0\}\end{cases}$.

Puisque f est définie est continue sur $[-1,1[$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $[-1,1[$. En particulier, pour tout réel x de $[-1,1[$, $\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ existe.

2. La fonction f est continue sur $[0,1[$. De plus, d'après un théorème de croissances comparées, $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} -\ln(1-t) \underset{t\to 1}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge en 1 ou encore que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\mathrm{Li}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ ou enfin que la fonction Li est prolongeable par continuité en 1.

3. a) Le rayon de la série entière $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ est 1. En particulier, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\mathrm{Li}'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ car $\mathrm{Li}'(0) = f(0) = 1$.

Par suite, les fonctions Li et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ sont définies et dérivables sur $]-1,1[$, ont mêmes dérivées et coïncident en 0. On en déduit que ces deux fonctions coïncident sur $]-1,1[$. Donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $[-1,1]$. Mais alors puisque la fonction Li est également continue sur $[-1,1]$, on a

$$\mathrm{Li}(1) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{Li}(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\mathrm{Li}(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

4. a) On note g la fonction $x \mapsto \mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(1-x)$.
La fonction $x \mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $]0,1[$ et la fonction Li est dérivable sur $]0,1[$. Donc la fonction $x \mapsto \mathrm{Li}(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$ et il en est de même de la fonction g. De plus, $\mathrm{Li}' = f$ (f a été définie à la question 1.) et donc pour $x \in]0,1[$,

$$g'(x) = \mathrm{Li}'(x) - \mathrm{Li}'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x}.$$

b) Pour $x \in]0,1[$, posons $h(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$. h est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in]0,1[$,

$$h'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} = g'(x).$$

Donc, il existe une constante C telle que $\forall x \in]0,1[$, $g(x) = h(x)+C = -\ln(1-x)\ln(x)+C$. Maintenant, $-\ln(1-x)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \to 0$ et d'autre part, $g(x)$ tend vers $0 + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$ quand x tend vers 0. Quand x tend vers 0, on obtient donc $C = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x).}$$

5. Quand $x = \frac{1}{2}$, on obtient en particulier $2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2 2$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.}$$

6. a) Soit $x \in]-1,1[$. Alors $x^2 \in]-1,1[$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1+(-1)^n)\frac{x^n}{n^2}\\ &= 2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)^2} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^m}{m^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Remarque. La question 3. montre directement que le calcul précédent est valable sur $[-1,1]$.

b) Les deux fonctions $x \mapsto \mathrm{Li}(x) + \mathrm{Li}(-x)$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^2)$ sont continues sur $[-1,1]$ d'après la question 2. et coïncident sur $]-1,1[$ d'après la question précédente. On en déduit que ces deux fonctions coïncident sur $[-1,1]$. En particulier, $\mathrm{Li}(-1) + \mathrm{Li}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}(1)$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \mathrm{Li}(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{Li}(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

7. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ (car $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}$). Donc, quand x décrit $]0,1[$, $\dfrac{1-x}{1+x}$ décrit $\left]\dfrac{1-1}{1+1}, \dfrac{1-0}{1+0}\right[=]0,1[$.

On note g et h les fonctions définies sur $]0,1[$ par : $\forall x \in]0,1[$, $g(x) = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(-x) + \mathrm{Li}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ et $\forall x \in]0,1[$, $h(x) = \dfrac{\pi^2}{4} + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\ln(x)$.

g est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{-x} - \frac{2}{(x+1)^2}\frac{\ln\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\dfrac{1-x}{1+x}} - \frac{2}{(x+1)^2}\frac{\ln\left(1-\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{\dfrac{x-1}{x+1}} \\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1}\left(\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \ln\left(\frac{2}{1+x}\right)\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1}\ln(x).
\end{aligned}$$

h est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in]0,1[$,

$$h'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1}{(1+x)/(1-x)}\ln(x) + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{2}{x^2-1}\ln(x).$$

Ainsi, les fonctions g et h ont la même dérivée sur $]0,1[$ et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[$, $g(x) = C + h(x)$. Quand x tend vers 0, $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\ln(x) \sim \ln(1-x)\ln(x) \,\mathrm{Im}\, -x\ln(x)$ et donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{\pi^2}{4}$ quand x tend vers 0.

D'autre part, quand x tend vers 0, $g(x)$ tend vers $\mathrm{Li}(0) - \mathrm{Li}(0) + \mathrm{Li}(1) - \mathrm{Li}(-1) = \dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{\pi^2}{4}$. Quand x tend vers 0, on obtient donc $C = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x).}$$

b) Si $x = \sqrt{2}-1 \in]0,1[$, $\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$. Par suite, avec les notations précédentes

$$\begin{aligned}
g\left(\sqrt{2}-1\right) &= 2\left(\mathrm{Li}\left(\sqrt{2}-1\right) - \mathrm{Li}\left(-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right) \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}(1-(-1)^n)\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^n}{n^2} = 4\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2m+1}}{(2m+1)^2},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{(2n+1)^2} &= \frac{g\left(\sqrt{2}-1\right)}{4} = \frac{h\left(\sqrt{2}-1\right)}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2\left(\sqrt{2}-1\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - \ln^2\left(\sqrt{2}-1\right)\right).}$$

