SESSION 2006

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Partie I : étude de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$

I.1. Intersections de $\mathcal{Q}$ avec une famille de plans

a) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) \wedge \overrightarrow{k} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$.

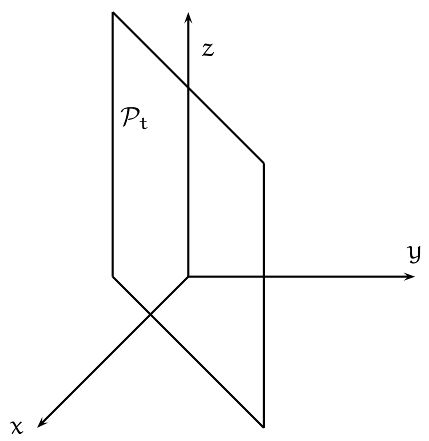
b) La matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ à la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les formules de changement de repères s'écrivent alors

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) \\ z = y_1 \end{cases}.}$$

Soit M un point de $\mathcal{E}$. On note (x, y, z) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_0$ et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_1$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{Q} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_1 + z_1)^2 - \frac{3}{2}(x_1 + z_1)(x_1 - z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) - \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}z_1^2 + \sqrt{2}z_1 - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2\sqrt{2}z_1 = 0. \end{aligned}$$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$. $\mathcal{P}_t$ est le plan d'équation $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = t$ ou encore $x - y = t\sqrt{2}$ dans $\mathcal{R}_0$. $\mathcal{P}_t$ est un plan perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et parallèle au plan d'équation $x = y$ dans $\mathcal{R}_0$.



Ensuite

$$M \in \mathcal{Q}\cap\mathcal{P}_t \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = t \\ x_1^2+y_1^2-5t^2-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}y_1-2\sqrt{2}t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = t \\ x_1^2+\left(y_1-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 5t^2+2\sqrt{2}t+\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = t \\ x_1^2+\left(y_1-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = 5\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \end{array}\right. .$$

Donc, $\mathcal{P}_t\cap\mathcal{Q}$ est un cercle de centre C_t de coordonnées $\left(0,\dfrac{\sqrt{10}}{5},t\right)$ dans $\mathcal{R}_1$ et de rayon $R_t=\left|t\sqrt{5}+\sqrt{10}\right|$.

d) R_t est nul si et seulement si $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. Dans ce cas, $\mathcal{P}_t\cap\mathcal{Q}$ se réduit à l'unique point S de coordonnées $\left(0,\dfrac{\sqrt{10}}{5},-\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)$ dans $\mathcal{R}_1$ ou encore de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ dans $\mathcal{R}_0$ d'après les formules de changement de repère obtenues à la question b).

I.2. Nature de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$

a) Soit M un point de $\mathcal{E}$. On a $\left\{\begin{array}{l} x_1 = X \\ y_1 = Y+\dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ z_1 = Z-\dfrac{\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$. Par suite,

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{Q} &\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-5z_1^2-\frac{2\sqrt{10}}{5}y_1-2\sqrt{2}z_1=0 \\ &\Leftrightarrow X^2+\left(Y+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2-5\left(Z-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2-\frac{2\sqrt{10}}{5}\left(Y+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)-2\sqrt{2}\left(Z-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow X^2+Y^2=5Z^2. \end{aligned}$$

b) $\mathcal{Q}$ est donc un cône de révolution de sommet S. L'axe de $\mathcal{Q}$ est la droite de repère $\left(S,\overrightarrow{w}\right)$.

c) Une équation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}_0$ est $z=0$ puis une équation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}_1$ est $y_1=0$ et finalement une équation de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$ est $Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

$\mathcal{D}$ est la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} X=0 \\ Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$ dans $\mathcal{R}$ et donc la droite d'équation $Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ dans $\mathcal{R}'$. $\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}'$ admet pour système d'équations $\left\{\begin{array}{l} X=0 \\ X^2+Y^2=5Z^2 \end{array}\right.$ dans $\mathcal{R}$ et donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les droites d'équations $\left\{\begin{array}{l} X=0 \\ Z=\dfrac{1}{\sqrt{5}}Y \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} X=0 \\ Z=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}Y \end{array}\right.$ dans $\mathcal{R}$ ou encore les droites d'équations $Z=\dfrac{1}{\sqrt{5}}Y$ et $Z=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}Y$ dans $\mathcal{R}'$. Voir figure page suivante.

Le discriminant de la conique $\mathcal{C}$ est $\Delta=1\times1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=-\dfrac{5}{4}<0$. Donc $\mathcal{C}$ est une conique du genre hyperbole c'est-à-dire soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes. Plus précisément, puisque $\mathcal{Q}$ est un cône de révolution, $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}$ est une réunion de deux droites sécantes si et seulement si $S\in\mathcal{P}$. Or, dans $\mathcal{R}$, $z_S=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\neq 0$ et donc $S\notin\mathcal{P}$. Donc

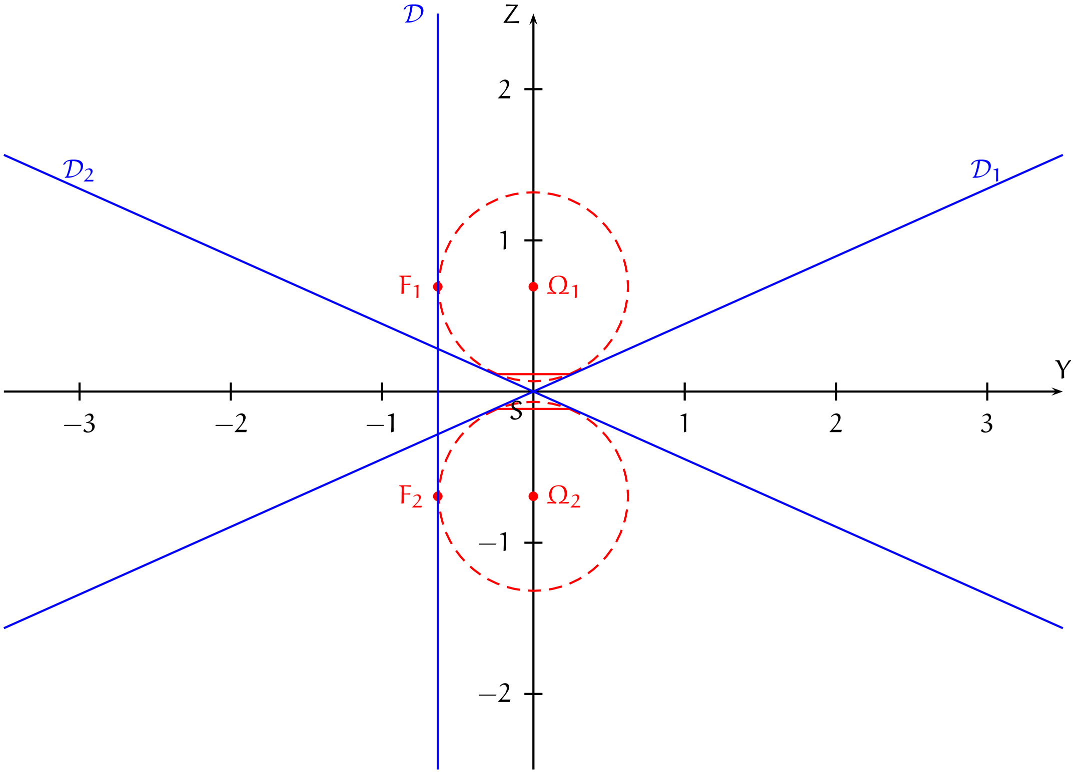
$$\boxed{\mathcal{C}\text{ est une hyperbole.}}$$

d) Soit $\Omega(0,Z)$ un point de l'axe $\left(S,\overrightarrow{w}\right)$. Ω est déjà à égale distance des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donc Ω est le centre d'un cercle tangent aux trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $d(\Omega,\mathcal{D})=d(\Omega,\mathcal{D}_1)$. Maintenant,

$$d(\Omega,\mathcal{D}) = d(\Omega,\mathcal{D}_1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{|-Z|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1^2}} \Leftrightarrow Z^2 = \frac{12}{25}$$
$$\Leftrightarrow Z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

On trouve donc deux cercles de centres respectifs $\Omega_1\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)_{\mathcal{R}'}$ et $\Omega_2\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)_{\mathcal{R}'}$. Le rayon de ces deux cercles est $\rho = d(\Omega_1,\mathcal{D}) = d(\Omega_2,\mathcal{D}) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

e) Ω_1 a pour coordonnées $\left(0, 0, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ dans $\mathcal{R}$. La distance de Ω_1 à $\mathcal{P}$ est donc $\frac{\sqrt{10}}{5} = \rho$. Par suite, $\mathcal{S}_1$ est tangente à $\mathcal{P}$ en F_1 de coordonnées $\left(0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans $\mathcal{R}$. De même, $\mathcal{S}_2$ est tangente à $\mathcal{P}$ en F_2 de coordonnées $\left(0, -\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$ dans $\mathcal{R}$.



S_1 est la sphère d'équation $X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5}$ dans $\mathcal{R}$. Donc

$$M(X,Y,Z) \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ X^2 + Y^2 = 5Z^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} - \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 5Z^2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ 6Z^2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}Z + \frac{2}{25} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ 6\left(Z - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \\ Z = \frac{1}{5\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

De plus, la distance de Ω_1 au plan d'équation $Z = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ est $\left|\dfrac{1}{5\sqrt{3}} - \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0,57\ldots < 0,6\ldots = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \rho$. Donc $\mathcal{Q}\cap\mathcal{S}_1$ est un cercle. Le cercle $\mathcal{C}_1$ se projette sur $\mathcal{P}'$ en un segment qui a été représenté sur la figure.
On note A et B les points de $\mathcal{Q}\cap P'\cap\mathcal{S}_1$. Les plans tangents à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}_1$ en A et B sont perpendiculaires à $\mathcal{P}'$ et leurs traces sur $\mathcal{P}'$ sont confondues : ce sont les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Ces plans tangents sont donc confondus ou encore $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}_1$ sont tangents en A et B. Ce résultat reste vrai en tout point du cercle $\mathcal{Q}\cap\mathcal{S}_1$ par révolution d'axe (SZ).
En résumé, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}_1$ sont tangents le long d'un cercle. Par symétrie, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}_2$ sont tangents le long d'un cercle.

I.3. Deux caractérisations de $\mathcal{C}$

a) On sait qu'un cône de révolution de sommet S est une réunion de droites passant par S. Donc pour tout point M de $\mathcal{Q}$ distinct de S, la droite (MS) est contenue dans $\mathcal{Q}$. C'est en particulier le cas si $M\in\mathcal{S}\cap\mathcal{P}$ car $M\neq S$, S n'étant pas dans $\mathcal{P}$.
Soit M_0 un point de $\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}$. L'intersection de la droite (M_0S) et du cercle $\mathcal{C}_1$ est encore l'intersection de la droite (M_0S) et du plan d'équation $Z = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

$\mathcal{Q}\cap\mathcal{P}$ est l'ensemble d'équations $\left\{\begin{array}{l} X^2+Y^2=5Z^2\\ Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} -X^2+5Z^2=\dfrac{2}{5}\\ Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\end{array}\right.$ et donc les coordonnées de M_0 dans $\mathcal{R}$ sont de la forme $\left(X_0, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}, Z_0\right)$ avec $-X_0^2+5Z_0^2=\dfrac{2}{5}$ (en particulier, $Z_0\neq 0$).

La droite (M_0S) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} X=\lambda X_0\\ Y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\lambda\\ Z=\lambda Z_0\end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Elle coupe le plan d'équation $Z=\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ en le point T_1 de coordonnées $\left(\dfrac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}}, \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right)$.
Par suite,

$$\begin{aligned}
M_0T_1^2 &= \left(\frac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}} - X_0\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} - Z_0\right)^2\\
&= X_0^2\left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1\right)^2 + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} + 1\right)^2 + Z_0^2\left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1\right)^2\\
&= 6Z_0^2\left(\frac{1}{5Z_0\sqrt{3}} - 1\right)^2 = 6\left(Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
MF_1^2 &= (0-X_0)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - Z_0\right)^2\\
&= 5Z_0^2 - \frac{2}{5} + \left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - Z_0\right)^2 = 6Z_0^2 - \frac{4\sqrt{3}}{5}Z_0 + \frac{2}{25}\\
&= 6\left(Z_0 - \frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout point M de $\mathcal{C}$, on a $MT_1 = MF_1$. De même, $MT_2 = MF_2$ par symétrie.

D'autre part, les points M, T_1 et T_2 sont alignés sur la droite (MS). De plus, $Z_M^2 = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}+X_0^2\right) \geqslant \dfrac{2}{25} > \dfrac{1}{75} = (Z_{T_1})^2$.
Donc, ou bien $Z_M > Z_{T_1} > Z_{T_2}$, ou bien $z_{T_1} > Z_{T_2} > z_M$. Ainsi, M est extérieur au segment $[T_1T_2]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
|MT_1 - MT_2| = T_1T_2 = 2ST_1 &= 2\sqrt{\left(\frac{X_0}{5Z_0\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{25Z_0\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}\right)^2}\\
&= 2\sqrt{\frac{5Z_0^2 - \frac{2}{5}}{75Z_0^2} + \frac{10}{25\times 75Z_0^2} + \frac{1}{75}} = 2\sqrt{\frac{5}{75} + \frac{1}{75}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout point M de $\mathcal{C}$, on a $|MF_1 - MF_2| = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. On retrouve ainsi la définition bifocale de l'hyperbole. $\mathcal{C}$ est une hyperbole de foyers F_1 et F_2.

b) Δ_1 est la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} Y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5} \\ Z = \dfrac{1}{5\sqrt{3}} \end{array}\right.$. En particulier, Δ_1 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Le projeté orthogonal H_1 de M_0 de coordonnées $\left(X_0, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}, Z_0\right)$ avec $-X_0^2 + 5Z_0^2 = \dfrac{2}{5}$ sur Δ_1 a des coordonnées de la forme $\left(X, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}, \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right)$. L'égalité $\overrightarrow{M_0H_1}.\overrightarrow{u} = 0$ fournit $X - X_0 = 0$ et donc H_1 a pour coordonnées $\left(X_0, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}, \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right)$. La distance de M_0 à H_1 est donc $\left|Z_0 - \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right|$. D'autre part, on a vu à la question a) que $M_0F_1 = M_0T_1 = \sqrt{6}\left|Z_0 - \dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right|$. Donc, pour tout point M de $\mathcal{C}$, $\dfrac{MH_1}{MT_1} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ et de même $\dfrac{MH_2}{MT_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

En résumé, pour tout point M de $\mathcal{C}$, $MF_1 = \sqrt{6}\ d(M, \Delta_1)$ et aussi $MF_2 = \sqrt{6}\ d(M, \Delta_2)$. $\mathcal{C}$ est donc une hyperbole de foyers F_1 et F_2, de directrices (Δ_1) et (Δ_2) et d'excentricité $\sqrt{6}$.

Partie II : résolution de l'équation diophantienne pour de petites valeurs de n

II.1. Une étude élémentaire

a) Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'équation a un sens si et seulement si $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant p-1 \leqslant n$ et $0 \leqslant p \leqslant n-1$ ou encore $2 \leqslant p+1 \leqslant n+2$ et $1 \leqslant p+1 \leqslant n$ ou enfin $2 \leqslant p+1 \leqslant n$. Pour un tel couple d'entiers,

$$\begin{aligned}\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \Leftrightarrow \frac{n}{(n-p+1)(n-p)} = \frac{1}{p} \\ &\Leftrightarrow np = n^2 + p^2 - 2np + n - p \Leftrightarrow n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0.\end{aligned}$$

b) Soit $n \geqslant 1$. Le discriminant du polynôme $P = n^2 - 3nX + X^2 + n - X = X^2 - (3n+1)X + n^2 + n$ est

$$\Delta = (3n+1)^2 - 4(n^2+n) = 5n^2 + 2n + 1 > 0.$$

Donc le polynôme P admet deux racines réelles à savoir $X_1 = \dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{3n+1+\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

$$\begin{aligned}2 \leqslant X_1 + 1 \leqslant n &\Leftrightarrow 2 \leqslant \frac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2} + 1 \leqslant n \Leftrightarrow n+3 \leqslant \sqrt{5n^2+2n+1} \leqslant 3n-1 \\ &\Leftrightarrow (n+3)^2 \leqslant 5n^2+2n+1 \leqslant (3n-1)^2 \text{ (car } 3n-1 \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow 4n^2 - 4n - 8 \geqslant 0 \text{ et } 4n^2 - 8n \geqslant 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \geqslant 0 \text{ et } n^2 - 2n \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 2.\end{aligned}$$

D'autre part, pour $n \geqslant 1$, $X_2 + 1 = \dfrac{3n+1+\sqrt{5n^2+2n+1}}{2} + 1 > \dfrac{3n}{2} + 1 > n$ et donc, il n'existe pas d'entier naturel non nul n tel que $2 \leqslant X_2 + 1 \leqslant n$.

c) Le résultat est clair si $b \in \{0, 1\}$: $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ sont des carrés parfaits et d'autre part, $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$ sont des rationnels.
Soit b un entier supérieur ou égal à 2. Si b est un carré parfait, alors $\sqrt{b}$ est un entier et en particulier un rationnel. Réciproquement, si $\sqrt{b}$ est un rationnel, il existe deux entiers naturel non nuls p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{b} = \dfrac{p}{q}$ et donc tels que $p^2 = bq^2$. Mais alors, l'entier q^2 divise l'entier $bq^2 = p^2$. Puisque les entiers p et q sont premiers entre eux, il en est de même des entiers p^2 et q^2. Comme q^2 divise q^2 et p^2, q^2 divise le PGCD de p^2 et q^2 c'est-à-dire 1. Par suite, $q^2 = 1$ puis $b = p^2$ et donc b est un carré parfait.

d) Soit (n, p) une solution de (Σ_1). La question a) montre que $n \geqslant 2$ puis la question b) montre que l'entier p est nécessairement égal à $X_1 = \dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$. En particulier, $\dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est rationnel et il en est de même de $\sqrt{5n^2+2n+1}$. La question c) montre alors que $5n^2+2n+1$ est un carré parfait.

e) Réciproquement, soit $n \geqslant 2$ tel que $5n^2+2n+1$ soit un carré parfait. Posons $5n^2+2n+1 = k^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il existe au plus un entier p tel que (n, p) soit une solution de (Σ_1) à savoir $p = \dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

Le couple (n, p) est effectivement solution si et seulement si $\dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est un entier ou encore $3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}$ est un entier pair.
$3n+1 = 2n+(n+1)$ a la parité de $n+1$. D'autre part, $k^2 = 4n^2+(n^2+2n+1) = 4n^2+(n+1)^2$ a la parité de $(n+1)^2$. Comme un entier a même parité que son carré, k a même parité que $n+1$. Finalement, $3n+1$ et $k = \sqrt{5n^2+2n+1}$ ont la même parité puis $3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1} = 3n+1-k$ est un entier pair et finalement $p = \dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$ est un entier.
Donc, si $n \geqslant 2$ et $5n^2+2n+1$ est un carré parfait, alors il existe un unique entier p tel que (n, p) soit une solution de (Σ_1) à savoir $p = \dfrac{3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1}}{2}$.

f) Algorithme.

Entrer n_0.
$n = 2$
Tant $n \leqslant n_0 - 1$, faire
  si $\sqrt{5n^2+2n+1}$ est entier,
    $p = (3n+1-\sqrt{5n^2+2n+1})/2$
    afficher (n, p)
    $n = n+1$
  sinon
    $n = n+1$
fin

II.2. Une méthode plus arithmétique

a) D'après II.1.a), l'équation $n^2+p^2-3np+n-p = 0$ équivaut à l'équation $np = (n-p)(n-p+1)$.
Par suite, $np = n(n-p+1-p)+p(p-1)$ et donc $p(p-1) = n(n+3p-1)$. Ainsi, n divise $p(p-1)$ et puisque n et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que n divise $p-1$.
Si $p-1 \geqslant 1$ ou encore $p \geqslant 2$, ceci impose en particulier, $p+1 \leqslant n \leqslant p-1$ ce qui est impossible. Il ne reste que $p = 1$ puis $n^2-2n = 0$ et donc $n = 2$. Ainsi, il existe un unique couple (n, p) solution de (Σ_1) tel que n et p soient premiers entre eux à savoir $(2, 1)$.

b) Puisque $n > p$, on a $u > v$ ou encore $u - v > 0$. L'égalité $np = (n-p)(n-p+1)$ fournit après simplification par r

$$ruv = (u-v)(ru-rv+1) = r(u-v)^2+(u-v) \ (*).$$

Mais alors r divise $r(uv-(u-v)^2) = u-v$. Par suite, il existe un entier naturel non nul k tel que $u-v = kr$. Après simplification par r dans l'égalité $(*)$, on obtient

$$uv = k^2r^2+k = k(kr^2+1).$$

Donc k divise uv. Si k n'est pas 1, k admet au moins un facteur premier m supérieur ou égal à 2. m divise k et donc m divise $u-v$. Maintenant, si par exemple m est un facteur premier de u, alors m divise u et m divise $u-v$. Donc m divise $u-(u-v) = v$ ce qui contredit le fait que u et v sont premiers entre eux. Donc $k = 1$ puis $r = u-v$.

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $ruv = r^3+r$ ou encore $(r+v)v = r^2+1$ puis $v^2+rv-r^2-1 = 0$. On en déduit que $v \in \left\{\dfrac{-r \pm \sqrt{r^2-4(-r^2-1)}}{2}\right\} = \left\{\dfrac{-r \pm \sqrt{5r^2+4}}{2}\right\}$ puis que $v = \dfrac{\sqrt{5r^2+4}-r}{2}$ car $v > 0$.

Enfin, $p = rv = r\dfrac{\sqrt{5r^2+4}-r}{2} > r\dfrac{\sqrt{5r^2}-r}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r^2$ et donc $r^2 < \dfrac{2p}{\sqrt{5}-1}$ car $\sqrt{5}-1 > 0$.

c) On a déjà le couple $(2, 1)$ qui est l'unique solution telle que $n \wedge p = 1$.
Sinon on a $p \leqslant 104$ et donc $r^2 < \dfrac{208}{\sqrt{5}-1}$ puis $2 \leqslant r < 12, 9\ldots$. Donc $r \in [\![1, 12]\!]$. De plus, $5r^2+4$ doit être un carré parfait ce qui impose $r \in \{3, 8\}$.

• Si $r = 3$, $v = \dfrac{\sqrt{5\times 3^2+4}-3}{2} = 2$ puis $u = r+v = 5$ puis $n = ru = 15$ et $p = rv = 6$. Réciproquement, si $n = 15$ et $p = 6$, $np-(n-p)(n-p+1) = 15\times 6 - 9\times 10 = 0$ et donc $(15, 6)$ est un couple solution de (Σ_1).

• Si $r = 8$, $v = \dfrac{\sqrt{5\times 8^2+4}-8}{2} = 5$ puis $u = r+v = 13$ puis $n = ru = 104$ et $p = rv = 40$. Réciproquement, si $n = 104$ et $p = 40$, $np-(n-p)(n-p+1) = 104\times 40 - 64\times 65 = 0$ et donc $(104, 40)$ est un couple solution de (Σ_1).

$\boxed{\text{Les couples } (n, p) \text{ solutions de } (\Sigma_1) \text{ tels que } n \leqslant 105 \text{ sont } (2,1),\ (15,6) \text{ et } (104,40).}$

Partie III : un groupe de transformations affines conservant $\mathcal{S}$

III.1. Définition d'un nouveau repère $\mathcal{R}_1$ associé à la conique $\mathcal{C}$

a) Soit M un point de $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - 3\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)\left(y_1 + \frac{1}{5}\right) + \left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(x_1 - \frac{1}{5}\right) - \left(y_1 + \frac{1}{5}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

b) $a^2 + b^2 - 3ab = \left(b - \dfrac{3a}{2}\right)^2 - \dfrac{5a^2}{4} = \left(b - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a\right)\left(b - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a\right)$.

c) Posons donc $\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}x_1 - y_1 = \dfrac{\sqrt{5}+3}{2}\left(x + \dfrac{1}{5}\right) - \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \\ Y = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}x_1 + y_1 = \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\left(x + \dfrac{1}{5}\right) + \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \end{array}\right.$ (on a bien $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-3}{2} = \sqrt{5} > 0$). Alors,

$$x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(y_1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}x_1\right)\left(y_1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}x_1\right) \Leftrightarrow (-X)Y = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5XY + 1 = 0.$$

Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x_1 - y_1 \\ Y = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}x_1 + y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X+Y) \\ y_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X+Y) - \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \dfrac{1}{5} \end{array}\right..$$

d) Les axes de $\mathcal{R}_1$ sont les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{C}$.

III.2. Transformations affines conservant $\mathcal{C}$

a) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$. Si $h \in G_1$, alors $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et en particulier, $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

Réciproquement, supposons $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.
Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathcal{C} \\ t & \mapsto & \left(t, -\dfrac{1}{5t}\right) \end{array}$. f est une bijection continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathcal{C}$. Ensuite, $\mathcal{C}$ est la réunion disjointe des deux branches d'hyperbole $\mathcal{C}_1 = f(]0, +\infty[)$ et $\mathcal{C}_2 = f(]-\infty, 0[)$.
L'inclusion $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ permet de définir l'application $g = f^{-1} \circ h \circ f$.

L'application g est injective et continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée d'injections et d'applications continues (on sait qu'une application affine d'un espace de dimension finie est continue sur cet espace) et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. D'après le théorème d'homéomorphie, on sait que g est strictement monotone sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et que l'image par g de chacun de ces deux intervalles est un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $]a, b[\subset \mathbb{R}^*$.

Supposons sans perte de généralité que g soit strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $g(]0, +\infty[) =]a, b[\subset]0, +\infty[$. Vérifions que $b = +\infty$. Supposons par l'absurde que b soit réel. Alors $\lim\limits_{t \to +\infty} h(f(t)) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(g(t)) = f(b) = \left(b, -\dfrac{1}{5b}\right)$.
Mais d'autre part, en notant $L(h)$ la partie linéaire de h,

$$\|h(f(t)) - h(0,0)\| = \|L(h)(f(t) - (0,0))\| = \left\|L(h)\left(t, -\frac{1}{5t}\right)\right\| = |t|\left\|L(h)\left(1, -\frac{1}{5t^2}\right)\right\|.$$

Quand t tend vers $+\infty$, $\left(1, -\dfrac{1}{5t^2}\right)$ tend vers $(1, 0)$ et donc $\left\|L(h)\left(1, -\dfrac{1}{5t^2}\right)\right\|$ tend vers $\|L(h)(1,0)\|$ (car un endomorphisme d'un espace de dimension finie est continu sur cet espace. Maintenant, puisque h est bijective, il en est de même de $L(h)$ et en particulier $\|L(h)(1,0)\| \neq 0$. Mais alors $|t|\left\|L(h)\left(1, -\dfrac{1}{5t^2}\right)\right\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\|h(f(t)) - h(0,0)\|$. Ceci contredit le fait que $\|h(f(t)) - h(0,0)\|$ tend vers $\|f(b) - h(0,0)\|$. Il était donc absurde de supposer b réel et donc $b = +\infty$.

De même, $a = 0$ et donc si $g(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$, alors $g(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Dans ce cas, $h(\mathcal{C}_1) = h(f(]0, +\infty[)) = f(g(]0, +\infty[)) = f(]0, +\infty[) = \mathcal{C}_1$. De même, si $g(]0, +\infty[) \subset]-\infty, 0[$, alors $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

De même, $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$ ou $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$. Enfin, puisque h est injective, on ne peut avoir $h(\mathcal{C}_1) = h(\mathcal{C}_2)$ et donc ou bien $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$, ou bien $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ et $h(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1$. Dans tous les cas, on a $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

b) G_1 est contenu dans $GA(\mathcal{P})$. D'autre part, $Id_E \in G_1$.
Enfin, si h et k sont des éléments de G_1, $h \circ k^{-1}(\mathcal{C}) = h \circ k^{-1}(k(\mathcal{C})) = h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et donc $h \circ k^{-1} \in G_1$. On a montré que

$$\boxed{G_1 \text{ est un sous-groupe de } GA(\mathcal{P}).}$$

c) L'énoncé fournit l'écriture générale d'une application affine : il existe un unique sextuplet (a, b, c, d, e, f) tel que $\left\{\begin{array}{l} X' = aX + bY + c \\ Y' = dX + eY + f \end{array}\right.$. De plus, $h \in GA(\mathcal{P})$ si et seulement si la partie linéaire $L(h)$ de h est un automorphisme ce qui équivaut à $\det(L(h)) \neq 0$ ou encore $ae - bd \neq 0$.

d) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$ (ce qui équivaut à $ae - bd \neq 0$). $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M de coordonnées $\left(X, -\dfrac{1}{5X}\right)$, $X \in \mathbb{R}^*$, dans le repère $\mathcal{R}_1$. Donc

$$\begin{aligned}
h \in G_1 &\Leftrightarrow h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^*,\ 5\left(aX - \frac{b}{5X} + c\right)\left(dX - \frac{e}{5X} + f\right) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^*,\ 5\left(aX^2 + cX - \frac{b}{5}\right)\left(dX^2 + fX - \frac{e}{5}\right) + X^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R},\ 5adX^4 + 5(af + cd)X^3 + (5cf - ae - bd + 1)X^2 - (bf + ce)X + \frac{be}{5} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

En résumé, $\forall h \in GA(\mathcal{P})$, $h \in G_1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae - bd \neq 0 \end{array}\right.$ (S).

e) $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 0 \\ af = 0 \\ 5cf - ae + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae \neq 0 \end{array}\right.$ (S_1) ou $\left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ cd = 0 \\ 5cf - bd + 1 = 0 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ bd \neq 0 \end{array}\right.$ (S_2).

$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 0 \\ ae \neq 0 \\ f = 0 \\ -ae + 1 = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ e = \dfrac{1}{a} \\ d = 0 \\ f = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$ et $(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ bd \neq 0 \\ c = 0 \\ -bd + 1 = 0 \\ f = 0 \\ e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \\ d = \dfrac{1}{b} \\ c = 0 \\ f = 0 \\ e = 0 \end{array}\right.$.

Les éléments de G_1 sont donc les transformations de la forme $h_1\ :\ (X, Y) \mapsto \left(\mu X, \dfrac{Y}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^*$, et $h_2\ :\ (X, Y) \mapsto \left(\mu Y, \dfrac{X}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^*$.

On sait qu'une application affine est une symétrie si et seulement si cette application est involutive.

$$h_1^2 = Id \Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2,\ \left(\mu^2 X, \frac{Y}{\mu^2}\right) = (X, Y) \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu \in \{-1, 1\}.$$

D'autre part, $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$, $h_2^2(X, Y) = h_2\left(\mu Y, \dfrac{X}{\mu}\right) = \left(\mu\dfrac{X}{\mu}, \dfrac{1}{\mu}\mu Y\right) = (X, Y)$ et donc, $\forall \mu \in \mathbb{R}^*$, $h_2^2 = Id$.

Les éléments de G_1 qui sont des symétries sont Id, la symétrie centrale de centre I et les transformations $(X, Y) \mapsto \left(\mu Y, \dfrac{X}{\mu}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}^2$, (qui sont des symétries axiales).

f) G_1' est contenu dans $GL_2(\mathbb{R})$ car pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$, $\det\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ et $\det\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \dfrac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. D'autre part, G_1' contient $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, pour $(\mu, \mu') \in (\mathbb{R}^*)^2$,

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\mu' & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu\mu'} \end{pmatrix} \in G'_1,$$

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu' \\ \dfrac{1}{\mu'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\mu' \\ \dfrac{1}{\mu\mu'} & 0 \end{pmatrix} \in G'_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \dfrac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu' \\ \dfrac{1}{\mu'} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu/\mu' & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu/\mu'} \end{pmatrix} \in G'_1 \text{ et donc } G'_1 \text{ est stable pour le produit matriciel.}$$

Enfin, pour $\mu \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1/\mu} \end{pmatrix} \in G'_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \dfrac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \dfrac{1}{1/\mu} & 0 \end{pmatrix} \in G'_1 \text{ et donc } G'_1 \text{ est stable pour le passage à l'inverse.}$$

Finalement, G'_1 est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Les transformations affines considérées associent $(0,0)$ à $(0,0)$. Ces transformations s'identifient à leur partie linéaire. Ensuite, il est connu que l'application qui à une application linéaire associe sa matrice dans une base donnée est un isomorphisme de l'algèbre $(L(P), +, ., \circ)$ sur l'algèbre $(M_2(\mathbb{R}), +, ., \times)$. Il en est de même de sa réciproque. Par restriction, l'application considérée est un isomorphisme de groupes.

III.3. Transformations affines conservant $\mathcal{Z}$

a) L'homothétie h de centre O et de rapport 2 est une bijection affine vérifiant $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. D'autre part, $h(\mathcal{Z}) = (2\mathbb{Z})^2 \neq \mathbb{Z}^2 = \mathcal{Z}$. Donc, si $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$, on n'a pas nécessairement $h \in G_2$.

b) G_2 est contenu dans $GA(\mathcal{P})$ et $Id \in G_2$. De plus, si h et k sont dans G_2, alors $h(k(\mathcal{Z})) = \mathcal{Z}$ et donc $h \circ k \in G_2$ et si $h \in G_2$, $h^{-1}(\mathcal{Z}) = h^{-1}(h(\mathcal{Z})) = \mathcal{Z}$ et donc $h^{-1} \in G_2$. Donc, G_2 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Soit $h : (x,y) \mapsto (ax+by+c, dx+ey+f)$ avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}^6$ et $|ae-bd| = 1$. On a déjà $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. Soit alors $(n,m) \in \mathcal{Z}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les formules de Cramer fournissent

$$h(x,y) = (n,m) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+by+c = n \\ dx+ey+f = m \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{ae-bd} \begin{vmatrix} n-c & b \\ m-f & d \end{vmatrix} \text{ et } y = \frac{1}{ae-bd} \begin{vmatrix} a & n-c \\ d & m-f \end{vmatrix}.$$

Puisque $ae - bd \in \{-1, 1\}$, le couple (x,y) obtenu est dans $\mathcal{Z}$. Ainsi, $\forall (n,m) \in \mathcal{Z}$, $\exists (x,y) \in \mathcal{Z}$ tel que $h(x,y) = (n,m)$ et finalement $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $h : (x,y) \mapsto (ax+by+c, dx+ey+f)$ avec $ae-bd \neq 0$ tel que $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. Déjà, $h(0,0)$, $h(1,0)$ et $h(0,1)$ sont dans $\mathcal{Z}$ et donc c, f, $a+c$, $d+f$, $b+c$, $e+f$ sont des entiers relatifs puis $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}^6$.
Ensuite, si t est la translation de vecteur $(-c,-f)$ et si $h' = t \circ h$, on a $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z} \Leftrightarrow h'(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$.

Maintenant, le système $h'(x,y) = (1,0)$ a une solution dans $\mathbb{Z}^2$ fournie par les formules de Cramer telle que $(ae-bd)x = e$ et $(ae-bd)y = -d$. Donc $ae-bd$ divise d et e. De même, le système $h'(x,y) = (0,1)$ a une solution dans $\mathbb{Z}^2$ et donc $ae-bd$ divise a et b.
Mais alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $ax+by$ est divisible par $ae-bd$ de même que $dx+ey$ et donc $\mathbb{Z}^2 = h'(\mathbb{Z}^2) \subset (ae-bd)\mathbb{Z}^2$ et en particulier $\mathbb{Z} \subset (ae-bd)\mathbb{Z}$. Ceci impose $ae-bd = \pm 1$ ou encore $|ae-bd| = 1$.

III.4. Le groupe Γ

a) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (0,1).$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (-1,0).$$

Donc P_1 et P_2 existent et sont uniquement définis : P_1 est le point de coordonnés $(-1,0)$ dans $\mathcal{R}_0$ et P_2 est le point de coordonnées $(0,1)$ dans $\mathcal{R}_0$.

Soient $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ puis f_1 la transformation $(x,y) \mapsto (ax+by+c, dx+ey+f)$.
• $f_1(O) = P_1 \Leftrightarrow (c,f) = (-1,0)$. On prend donc $c = -1$ et $f = 0$.

• $f_1(P_1) = O \Leftrightarrow (-a-1, -d) = (0,0)$. On prend donc $a = -1$ et $d = 0$.
• $f_1(I) = I \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+b}{5} - 1, \dfrac{e}{5}\right) = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow b = 3$ et $e = 1$.
Il existe une unique transformation affine f_1 répondant aux contraintes de l'énoncé à savoir la transformation $f_1 : (x,y) \mapsto (-x+3y-1, y)$.

Soient $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ puis f_2 la transformation $(x,y) \mapsto (ax+by+c, dx+ey+f)$.
• $f_2(O) = P_2 \Leftrightarrow (c,f) = (0,1)$. On prend donc $c = 0$ et $f = 1$.
• $f_2(P_2) = O \Leftrightarrow (b, e+1) = (0,0)$. On prend donc $b = 0$ et $e = -1$.
• $f_2(I) = I \Leftrightarrow \left(-\dfrac{a}{5}, \dfrac{-d-1}{5} + 1\right) = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow a = 1$ et $d = 3$.
Il existe une unique transformation affine f_2 répondant aux contraintes de l'énoncé à savoir la transformation $f_2 : (x,y) \mapsto (x, 3x-y+1)$.

D'après ce qui précède, $\left\{\begin{array}{l} x_1 = -x+3y-1 \\ y_1 = y \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x_2 = x \\ y_2 = 3x-y+1 \end{array}\right.$. D'après la question III.3.c), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_2.

D'après la question III.1.c),

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -x+3y-1 \\ y_1 = y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X_1+Y_1) - \dfrac{1}{5} = -\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}(X+Y) - \dfrac{1}{5}\right) + 3\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \dfrac{1}{5}\right) - 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X_1 + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y_1 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 + Y_1 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}X + \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}Y \\ (3-\sqrt{5})X_1 + (3+\sqrt{5})Y_1 = (3-\sqrt{5})X + (3+\sqrt{5})Y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 + Y_1 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}X + \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}Y \\ \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}X_1 + Y_1 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}X + Y \end{array}\right. \text{(après multiplication par } 3-\sqrt{5} \text{ et division par 4)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}Y \\ Y_1 = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}X \end{array}\right. \text{(vérification immédiate)}$$

avec $\dfrac{1}{(7+3\sqrt{5})/2} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$. De même,

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x \\ y_2 = 3x-y+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X_2+Y_2) - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X+Y) - \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X_2 + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y_2 + \dfrac{1}{5} = 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}(X+Y) - \dfrac{1}{5}\right) - \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y + \dfrac{1}{5}\right) + 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_2 + Y_2 = X + Y \\ (3-\sqrt{5})X_2 + (3+\sqrt{5})Y_2 = (3+\sqrt{5})X + (3-\sqrt{5})Y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_2 = Y \\ Y_2 = X \end{array}\right. \text{(vérification immédiate).}$$

D'après la question II.2.e), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_1 qui de plus sont des symétries et d'après la question III.3.c), f_1 et f_2 sont deux éléments de G_2. Finalement f_1 et f_2 sont deux éléments de $G_1 \cap G_2$ qui sont des symétries.

b) Les éléments de Γ distinct de Id sont de la forme $f_{i_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ f_{i_p}^{\varepsilon_p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1,2\}^p$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{-1,1\}^p$.
Puisque $f_1^{-1} = f_1$ et $f_2^{-1} = f_2$, ceci se résume aux produits $f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1,2\}^p$ et de plus, $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, ..., $i_{p-1} \neq i_p$ c'est-à-dire les produits du type
(I) $f_1 \circ f_2 \circ f_1 \ldots \circ f_1 \circ f_2 = (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$,
(II) $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_1$, $k \in \mathbb{N}$,
(III) $(f_2 \circ f_1)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$
(IV) $f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
Maintenant, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_2 \circ f_1)^k = (f_2^{-1} \circ f_1^{-1})^k = (f_1 \circ f_2)^{-k}$ et donc les types (I) et (III) se résument aux applications de la forme $(f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{Z}^*$.
D'autre part, pour $k \in \mathbb{N}$, $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_1 = f_1 \circ (f_2 \circ f_1)^k = f_2 \circ f_2 \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k-1}$ (où $-k-1$ décrit $\mathbb{Z}_-^*$ quand k décrit $\mathbb{N}$). Par suite, les types (II) et (IV) se résument aux applications de la forme $f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\Gamma = \{(f_1 \circ f_2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

c) Comme à la question III.2.f), Γ et Γ_1 sont des groupes isomorphes. Ensuite, $A_1A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ et donc pour $k \in \mathbb{Z}$, $(A_1A_2)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix}$ et $A_2(A_1A_2)^k = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix}$. Par suite

$$\Gamma_1 = \{(A_1A_2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{A_2(A_1A_2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Puisque $\lambda \in]1, +\infty[$, les matrices ci-dessus sont deux à deux distinctes et donc, par isomorphisme, chaque élément h de Γ correspond à un et un seul des deux cas (i) et (ii) et l'entier relatif intervenant dans la décomposition de h est unique.

d) Soit ϕ un morphisme de Γ dans H tel que $\phi(f_1) = a_1$ et $\phi(f_2) = a_2$. Soit h un élément de Γ. Ou bien il existe un unique entier relatif k tel que $h = (f_1 \circ f_2)^k$ et dans ce cas, on a nécessairement $\phi(h) = (\phi(f_1)\phi(f_2))^k = (a_1a_2)^k$, ou bien il existe un unique entier relatif k tel que $h = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$ et dans ce cas, on a nécessairement $\phi(h) = \phi(f_2)\left(\phi(f_1)\phi(f_2)\right)^k = a_2(a_1a_2)^k$. Ceci assure l'unicité de ϕ.

Réciproquement, soit ϕ l'application de Γ dans H définie par les égalités précédentes. Soient k et k' deux entiers relatifs.

• $\phi\left((f_1 \circ f_2)^k \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}\right) = \phi\left((f_1 \circ f_2)^{k+k'}\right) = (a_1a_2)^{k+k'} = (a_1a_2)^k(a_1a_2)^{k'} = \phi\left((f_1 \circ f_2)^k\right)\phi\left((f_1 \circ f_2)^{k'}\right)$.

• $\phi\left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}\right) = \phi\left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k+k'}\right) = a_2(a_1a_2)^{k+k'} = a_2(a_1a_2)^k(a_1a_2)^{k'}$
$= \phi\left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k\right)\phi\left((f_1 \circ f_2)^{k'}\right)$.

• Ensuite,
 - si $k \in \mathbb{Z}^-$, $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = (f_2 \circ f_1)^{-k} \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$
 - si $k > 0$, $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = (f_1 \circ f_2)^{k-1} \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_1 \circ (f_2 \circ f_1)^{k-1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}$.
 $= f_2 \circ f_2 \circ f_1 \circ (f_1 \circ f_2)^{-k+1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{-1} \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k+1} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$

Dans tous les cas, on a $(f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'} = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}$.

Dans ce calcul, seules ont servi les égalités $f_1^2 = f_2^2 = Id$. Comme $a_1^2 = a_2^2 = 1$, on a donc aussi $(a_1a_2)^k a_2(a_1a_2)^{k'} = a_2(a_1a_2)^{k'-k}$ puis
$\phi\left((f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}\right) = \phi\left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}\right) = a_2(a_1a_2)^{k'-k} = (a_1a_2)^k a_2(a_1a_2)^{k'}$
$= \phi\left((f_1 \circ f_2)^k\right)\phi\left(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}\right)$.

• $\phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'}) = \phi(f_2 \circ f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'-k}) = \phi((f_1 \circ f_2)^{k'-k}) = (a_1a_2)^{k'-k} = a_2a_2(a_1a_2)^{k'-k}$
$= a_2(a_1a_2)^k a_2(a_1a_2)^{k'} = \phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k)\phi(f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^{k'})$.

En résumé, $\forall (h_1, h_2) \in \Gamma^2$, $\phi(h_1 \circ h_2) = \phi(h_1)\phi(h_2)$ et donc ϕ est effectivement un morphisme de Γ dans H. Ceci montre l'existence de ϕ.

III.5. Utilisation de Γ pour engendrer une infinité de points de $\mathcal{S}$

a) $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe contenant f_1 et f_2 et donc contenant encore le groupe engendré par f_1 et f_2. Donc $\Gamma \subset G_1 \cap G_2$. Ceci signifie que pour tout élément h de Γ, $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et $h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. En particulier, pour tout élément h de Γ, $h(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ ou encore $\mathcal{S}$ est stable par Γ.

On rappelle que f_1 est la transformation affine qui au point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ associe le point de coordonnées $(-x + 3y - 1, y)$ et f_2 est la transformation affine qui au point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ associe le point de coordonnées $(x, 3x - y + 1)$. Donc $f_1 \circ f_2$ est la transformation qui au point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ associe le point de coordonnées $(-x + 3(3x - y + 1) - 1, 3x - y + 1) = (8x - 3y + 2, 3x - y + 1)$.
On en déduit que $M_1(2, 1)_{\mathcal{R}_0}$ puis $M_2(15, 6)_{\mathcal{R}_0}$ puis $M_3(104, 40)_{\mathcal{R}_0}$. On retrouve ainsi les couples solutions obtenus à la question II.2.c).

b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On note (X_k, Y_k) les coordonnées de M_k dans $\mathcal{R}_1$.

D'après la question III.1.c), les coordonnées de O dans $\mathcal{R}_1$ sont $\left(\dfrac{\sqrt{5}+5}{10}, \dfrac{\sqrt{5}-5}{10}\right)$. On a alors

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+5}{10} \\ \dfrac{\sqrt{5}-5}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}+5}{10}\lambda^k \\ \dfrac{\sqrt{5}-5}{10}\lambda^{-k} \end{pmatrix}$$

puis d'après la question III.1.a)

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(X_k + Y_k) - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{10}\lambda^k + \dfrac{1-\sqrt{5}}{10}\lambda^{-k} - \dfrac{1}{5} \\ y_k = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}X_k + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Y_k + \dfrac{1}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{10}\lambda^k - \dfrac{\sqrt{5}+1}{10}\lambda^{-k} + \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

On note alors que pour $k \in \mathbb{Z}$, le point M_{-k} se déduit du point M_k par la transformation affine s qui au point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$ associe le point de coordonnées $(-y, -x)$. s est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = -x$.

c) Pour tout réel x, $5x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + (x+1)^2 > 0$ et donc ϕ_1 et ϕ_2 sont définies sur $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 + 3x - \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 1 + 3x - 2y \\
&\Leftrightarrow 1 + 2x + 5x^2 = (1 + 3x - 2y)^2 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 + (6(1 - 2y) - 2)x + (1 - 2y)^2 - 1 = 0 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (3y - 1)x + y^2 - y = 0 \text{ et } 1 + 3x - 2y \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \text{ et } 1 + 3x - 2y \geqslant 0 \text{ (car } 5y^2 - 2y + 1 = 4y^2 + (y-1)^2 > 0).
\end{aligned}$$

Maintenant, $1 + 3x - 2y = 1 + 3\dfrac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} - 2y = \dfrac{5y - 1 \pm 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$.

Si $5y - 1 < 0$, alors $\dfrac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} < 0$ et si $5y - 1 \geqslant 0$,

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}\right) = \operatorname{sgn}\left((5y-1)^2 - 9(5y^2 - 2y + 1)\right) = \operatorname{sgn}(-20y^2 + 8y - 8) = - \text{ car } \Delta' = 4^2 - 20 \times 8 < 0.$$

Donc pour tout y, $\dfrac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} < 0$ et par suite $x = \dfrac{5y - 1 - 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$ ne convient jamais.

Si $5y - 1 \geqslant 0$, $\dfrac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \geqslant 0$ et si $5y - 1 < 0$,

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}\right) = \operatorname{sgn}\left(9(5y^2 - 2y + 1) - (5y-1)^2\right) = +.$$

Donc, pour tout y réel, $x = \dfrac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$ convient. On a montré que pour tout réel y, il existe un réel x et un seul tel que $\phi(x) = y$ à savoir $x = \dfrac{5y - 1 + 3\sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}$.

$$\boxed{\phi_1 \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et de plus } \forall x \in \mathbb{R},\ \phi_1^{-1}(x) = \frac{3x - 1 + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2} = -\phi_1(-x).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède,

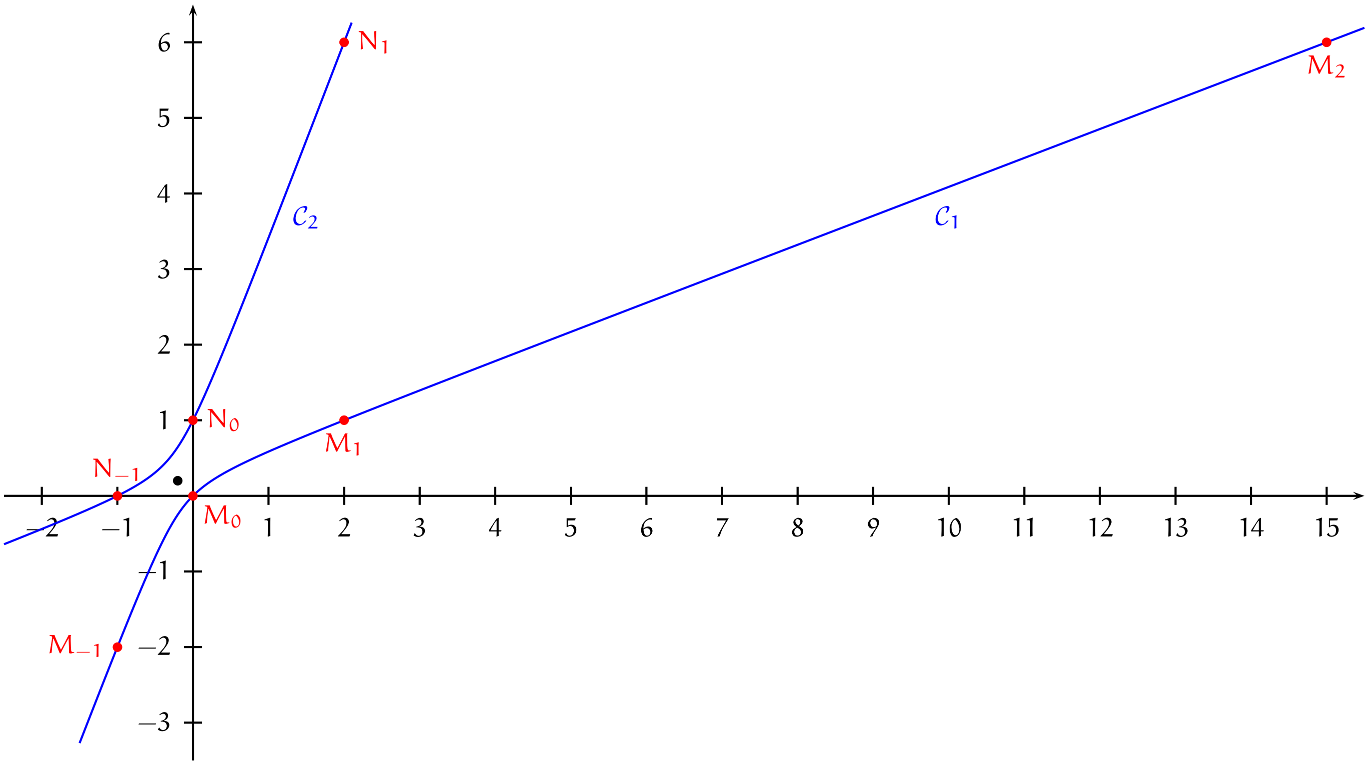
$$\begin{aligned}
\phi_2(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 + 3x + \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 2y - 1 - 3x \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 \pm \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2} \text{ et } 2y - 1 - 3x \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3y - 1 - \sqrt{5y^2 - 2y + 1}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_2 \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et de plus } \forall x \in \mathbb{R},\ \phi_2^{-1}(x) = \frac{3x - 1 - \sqrt{5x^2 - 2x + 1}}{2} = -\phi_2(-x).}$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ne sont pas vides. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi_1(x) = \phi_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1 + 2x + 5x^2} = 0$ ce qui est impossible. Donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$. Enfin, si M est un point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow y^2 - (3x+1)y + x^2 + x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(3x + 1 \pm \sqrt{5x^2 + 2x + 1}) \\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux ensembles non vides et disjoints dont la réunion est $\mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment une partition de $\mathcal{C}$.



d) Une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}_0$ est $x^2-3xy+y^2+x-y=0$. Une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$ est $5XY+1=0$. $\mathcal{C}_1$ est la partie de $\mathcal{C}$ telle que $1+3x-2y>0$ et $\mathcal{C}_2$ est la partie de $\mathcal{C}$ telle que $1+3x-2y<0$. Or, d'après la question III.1.c),

$$1+3x-2y = 1+\frac{3}{\sqrt{5}}(X+Y)-\frac{3}{5}-\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}X-\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}Y-\frac{2}{5}=X-Y.$$

Donc, dans le repère $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{C}$ a pour équation $5XY+1=0$ et $\mathcal{C}_1$ est la partie de $\mathcal{C}$ telle que $X-Y>0$ et $\mathcal{C}_2$ est la partie de $\mathcal{C}$ telle que $X-Y<0$.

Maintenant, d'après la question III.4.a), $(X_1,Y_1)=\left(\lambda Y,\dfrac{1}{\lambda}X\right)$ et $(X_2,Y_2)=(Y,X)$. Donc

$$M\in\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow 5XY+1=0 \text{ et } X-Y>0 \Leftrightarrow 5X_2Y_2+1>0 \text{ et } X_2-Y_2<0 \Leftrightarrow f_2(M)\in\mathcal{C}_2,$$

et donc aussi, puisque $f_2^{-1}=f_2$, $M\in\mathcal{C}_2 \Leftrightarrow f_2(M)\in\mathcal{C}_1$. Par suite, $f_2(\mathcal{C}_2)=\mathcal{C}_1$ et $f_2(\mathcal{C}_1)=\mathcal{C}_2$.

Ensuite, $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow 5XY+1=0\Leftrightarrow 5\lambda Y_1\dfrac{X_1}{\lambda}+1=0\Leftrightarrow 5X_1Y_1+1=0\Leftrightarrow f_1(M)\in\mathcal{C}$ et donc $f_1(\mathcal{C})=\mathcal{C}$.
D'autre part, pour $x\in\mathbb{R}$, si $M(x,\phi_1(x))$ est un point de $\mathcal{C}_1$ et si on note (x_1,y_1) les coordonnées de $f_1(M)$,

$$\begin{aligned}1+3x_1-2y_1 &= 1+3(-x+3\phi_1(x)-1)-2\phi_1(x)=7\phi_1(x)-3x-2=7\frac{1+3x-\sqrt{1+2x+5x^2}}{2}-3x-2\\ &=\frac{15x+3-7\sqrt{1+2x+5x^2}}{2}\end{aligned}$$

Si $15x+3<0$, alors $1+3x_1-2y_1<0$ et si $15x+3\geqslant 0$, $\mathrm{sgn}(1+3x_1-2y_1)=\mathrm{sgn}((15x+3)^2-49(1+2x+5x^2))=\mathrm{sgn}(-20x^2-8x-40)=-$ car $\Delta'=4^2-20\times 40<0$.
Ainsi, pour tout point M de $\mathcal{C}_1$, on a $1+3x_1-2y_1<0$ et donc $f_1(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{C}_2$.

En remplaçant $-\sqrt{1+2x+5x^2}$ par $\sqrt{1+2x+5x^2}$, si $M(x,\phi_2(x))$ est un point de $\mathcal{C}_2$,

$$1+3x_1-2y_1=\frac{15x+3+7\sqrt{1+2x+5x^2}}{2}>0$$

et donc $f_1(M)$ est un point de $\mathcal{C}_1$. Donc, $f_1(\mathcal{C}_2)\subset\mathcal{C}_1$. En résumé, $f_1(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{C}_2$ et $f_1(\mathcal{C}_2)\subset\mathcal{C}_1$. Mais alors $\mathcal{C}_2=f_1(f_1(\mathcal{C}_2))\subset f_1(\mathcal{C}_1)$ et donc $f_1(\mathcal{C}_1)=\mathcal{C}_2$. Puis, $f_1(\mathcal{C}_2)=\mathcal{C}_1$. On en déduit encore $f_1\circ f_2(\mathcal{C}_1)=\mathcal{C}_1$ et $f_1\circ f_2(\mathcal{C}_2)=\mathcal{C}_2$.

Puisque $M_0=O\in\mathcal{C}_1$, les $M_k=(f_1\circ f_2)^k(M_0)$, $k\in\mathbb{Z}$, appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_1$ puis les $N_k=f_2(M_k)$, $k\in\mathbb{Z}$, appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_2$.

Partie IV : résolution de (Σ)

IV.1. Premier cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n > 0$

a) $P_0 = P \in \mathcal{C}_1$ et si pour $i \in \mathbb{N}$, $P_i \in \mathcal{C}_1$, alors $f_1(P_i) \in \mathcal{C}_2$ puis $P_{i+1} = (f_1 \circ f_2)^{-1}(P_i) = f_2(f_1(P_i)) \in \mathcal{C}_1$. Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i \in \mathcal{C}_1$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. On a $f_2(P_{i+1}) = f_1(P_i)$. L'abscisse de $f_2(P_{i+1})$ est celle de P_{i+1} à savoir α_{i+1} et donc, puisque $f_2(P_{i+1}) \in \mathcal{C}_2$, $\beta_{i+1} = \phi_2(\alpha_{i+1})$.
L'ordonnée β_{i+1} de $f_2(P_{i+1})$ est aussi celle de $f_1(P_i)$ ou encore celle de P_i. Puisque $P_i \in \mathcal{C}_1$, $\phi_2(\alpha_{i+1}) = \beta_{i+1} = \beta_i = \phi_1(\alpha_i)$ et finalement, $\alpha_{i+1} = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_i)$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ \alpha_{i+1} = \phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_i)) \text{ et } \beta_i = \phi_1(\alpha_i).}$$

b) Les graphes tracés à la question III.5.c) montrent que les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$. Par suite, la fonction ϕ_2^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis la fonction $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On sait alors que la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement monotone (car $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{sgn}(\alpha_{i+2} - \alpha_{i+1}) = \text{sgn}(\phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_{i+1})) - \phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_i))) = \text{sgn}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$). De plus,

$$\begin{aligned}\text{sgn}(\alpha_1 - \alpha_0) &= \text{sgn}(\phi_2^{-1}(\phi_1(\alpha_0)) - \alpha_0) = \text{sgn}(\phi_2 \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_1(n) - \phi_2(n)) = \text{sgn}(\phi_1(n) - \phi_2(n))\\ &= \text{sgn}(-\sqrt{1 + 2n + 5n^2}) = -.\end{aligned}$$

Donc la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Si cette suite est minorée, elle converge vers un certain réel α vérifiant $\alpha = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha)$ (car $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est continue sur $\mathbb{R}$) ou encore $\phi_2(\alpha) = \phi_1(\alpha)$. Mais ceci est impossible car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_2(x) - \phi_1(x) = \sqrt{1 + 2x + 5x^2} > 0$. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante et non minorée.}}$$

0 n'est donc pas un minorant de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On en déduit que $\{i \in \mathbb{N}/\ \alpha_i \leqslant 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet un plus petit élément que l'on note k. Puisque $\alpha_0 = n > 0$, on a $k \geqslant 1$ et par définition, k est un entier naturel non nul tel que $\alpha_k \leqslant 0 < \alpha_{k-1}$.

c) Le point P_{k-1} est un point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse strictement positive et entière. Comme $\phi_1(1) = 2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, on a $\alpha_{k-1} \geqslant 2$. Puisque la fonction $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\alpha_k = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_{k-1}) \geqslant \phi_2^{-1} \circ \phi_1(2) = \phi_2^{-1}(1) = \frac{2 - \sqrt{4}}{2} = 0.$$

Par suite, $\alpha_k \leqslant 0 \leqslant \alpha_k$ et donc $\alpha_k = 0$ puis $\beta_k = \phi_1(0) = 0$. Finalement, $P_k = O$ puis $O = P_k = (f_1 \circ f_2)^{-k}(P)$ et donc $P = (f_1 \circ f_2)^k(O) = M_k$.

d) Les solutions de (Σ_1) sont les couples $(n, \phi_1(n))$, $n \in \mathbb{N}^*$, où de plus $\phi_1(n)$ est entier. D'après la question III.5, tout couple de coordonnées d'un point M_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est une solution de (Σ_1) et d'après ce qui précède, toute solution de (Σ_1) est un couple de coordonnées d'un point M_k, $k \in \mathbb{N}^*$. Donc les solutions de (Σ_1) sont les couples de coordonnées des points M_k où k décrit $\mathbb{N}^*$.

IV.2. Deuxième cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n < 0$

a) D'après la question III.5.c), $\phi_1(n) = p \Rightarrow n = \phi_1^{-1}(p) \Rightarrow -n = \phi_1(-p)$ et donc $P' \in \mathcal{C}_1$.

b) Puisque $n < 0$, on a $p = \phi_1(n) < 0$. Ainsi, l'abscisse de P' est strictement positive et P' est élément de $\mathcal{C}_1$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P' = M_k$. Maintenant, d'après la question III.5.b), si s est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$, $P = s(P') = s(M_k) = M_{-k}$. Encore une fois P est l'un des M_k, $k \in \mathbb{Z}$.

IV.3. Troisième cas : P est élément de $\mathcal{C}_2$

$f_2(P)$ est un élément de $\mathcal{C}_1$ à coordonnées entières. D'après les questions, IV.1 et IV.2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f_2(P) = M_k$. Mais alors, $P = f_2(M_k) = N_k$.

